수능다큐
수학영역

정답 및 풀이

미적분Ⅱ

정답을 확인할 때에는 **정답 한눈에 보기**를 이용하면 편리합니다.

다큐 Board

Part Ⓐ

기출 문제로 수능 유형 잡기

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

01 지수함수

Ⓐ 001 답 ③

$f(b)=a^b=3$, $f(c)=a^c=6$이므로

$$f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}$$
$$=(a^b\cdot a^c)^{\frac{1}{2}}=(3\cdot 6)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

보충학습

지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x\times a^y=a^{x+y}$ ② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$ ④ $(ab)^x=a^xb^x$

Ⓐ 002 답 ③

두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$의 교점이 P이고, 점 P의 x좌표가 k이므로 $a^{k-1}=3^k$

양변을 3^{k-1}으로 나누면

$$\frac{a^{k-1}}{3^{k-1}}=\frac{3^k}{3^{k-1}}$$

$$\therefore \left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $a>3$이므로 $\frac{a}{3}>1$

즉 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}}}{1+\frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한이므로 분모의 최고차항인 $\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}$으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}}{1+\frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}}{1+0}$$

$$=\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}=3 \ (\because ㉠)$$

보충학습

r^n을 포함한 수열의 극한

r^n을 포함한 수열의 극한은 r의 값의 범위를

$|r|<1$, $r=1$, $|r|>1$, $r=-1$

인 경우로 나누어 조사한다.

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}0 & (|r|<1)\\ 1 & (r=1)\\ \text{발산} & (|r|>1 \text{ 또는 } r=-1)\end{cases}$$

Ⓐ 003 답 ③

점 A의 x좌표를 b라 하면 $\mathrm{A}(b, 2)$이므로 $4^b=2$에서

$b=\log_4 2=\frac{1}{2}$ $\therefore \mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

점 B의 x좌표를 c라 하면 $\mathrm{B}(c, 2)$이므로 $2^c=2$에서

$c=1$ $\therefore \mathrm{B}(1, 2)$

점 C의 y좌표를 d라 하면 $\mathrm{C}(1, d)$이므로

$d=4^1=4$ $\therefore \mathrm{C}(1, 4)$

점 D의 x좌표를 e라 하면 $\mathrm{D}(e, 4)$이므로 $2^e=4$에서

$e=\log_2 4=2$ $\therefore \mathrm{D}(2, 4)$

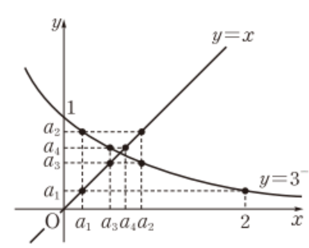
따라서 직선 AD의 기울기는

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)

$$\frac{4-2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

Ⓐ 004 답 ⑤

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같음을 이용하여 x축과 y축에서 a_1, a_2, a_3, a_4의 위치를 각각 찾는다.



$a_1=f(2)$, $a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)$, $a_4=f(a_3)$이므로 위의 그림에서

$a_3<a_4<a_2$

Ⓐ 005 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$와 $y=h(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로 $h(2)=f(-2)$이고 $h(2)=2$에서 점 R의 x좌표는 2, 점 P의 x좌표는 -2이다.

점 Q의 x좌표를 α라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{QR}}$이므로

$\alpha+2=2(2-\alpha)$, $\alpha+2=4-2\alpha$

$3\alpha=2$ $\therefore \alpha=\frac{2}{3}$

$g(\alpha)=2$에서 $b^{\frac{2}{3}}=2$이므로 $b=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore g(4)=b^4=(2^{\frac{3}{2}})^4=2^6=64$

다른풀이 세 점 P, Q, R의 y좌표는 모두 2이므로 세 점 P, Q, R의 x좌표는 각각 $-\log_a 2$, $\log_b 2$, $\log_a 2$이다.

$\overline{PQ} : \overline{QR} = 2 : 1$에서 $\overline{PQ} = 2\overline{QR}$이므로

$$\log_b 2 - (-\log_a 2) = 2(\log_a 2 - \log_b 2)$$

$$\log_b 2 + \log_a 2 = 2\log_a 2 - 2\log_b 2$$

$$\therefore \log_a 2 = 3\log_b 2$$

양변을 밑이 2인 로그로 변환하면

$$\frac{1}{\log_2 a} = \frac{3}{\log_2 b}$$

$$\log_2 b = 3\log_2 a = \log_2 a^3$$

$$\therefore b = a^3$$

$h(2) = 2$에서 $a^2 = 2$ $\therefore a = \sqrt{2}$ ($\because a > 1$)

$$\therefore b = a^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

따라서 $g(x) = (2\sqrt{2})^x$이므로

$$g(4) = (2\sqrt{2})^4 = (2^{\frac{3}{2}})^4 = 2^6 = 64$$

점 P의 x좌표를 p라 하면
$a^{-p} = 2$, $a^p = 2^{-1}$
$\therefore p = \log_a 2^{-1}$
$= -\log_a 2$

$a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $b \neq 1$일 때,
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Ⓐ 006 답 ③

$$f(1) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 64 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

$$f(1) = f\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3 = 64 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$$

$$f(1) = f\left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^6 = 64 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{6}\right) = 2$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{6}\right) = 14$$

Ⓐ 007 답 ①

$y = a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y = a^{-x}$

이 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 2 = a^{-(x-3)}, \text{ 즉 } y = a^{-x+3} + 2$$

이 그래프가 점 (1, 4)를 지나므로

$$4 = a^2 + 2, \qquad a^2 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt{2} \ (\because a > 0)$$

x 대신 $-x$ 대입

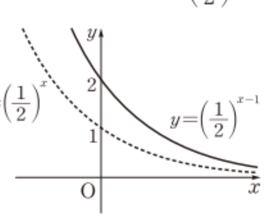
x 대신 $x-3$, y 대신 $y-2$ 대입

Ⓐ 008 답 ④

$y = f(x)$의 그래프는 기울기가 1이고, y절편이 1인 직선이므로 $f(x) = x + 1$

$$\therefore y = 2^{2-f(x)} = 2^{2-(x+1)} = 2^{-x+1} = 2^{-(x-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

따라서 $y = 2^{2-f(x)}$의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



Ⓐ 009 답 ①

함수 $y = 3^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = 3^{x-2}$

$\overline{AB}$는 x축에 평행하므로 $\overline{AB} = 3$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{AB} = 3$$

점 A의 좌표를 $(a, 3^{a+1})$이라 하면 점 C의 좌표는 $(a, 3^{a-2})$이므로

$$\overline{AC} = 3^{a+1} - 3^{a-2} = 3 \cdot 3^a - \frac{1}{9} \cdot 3^a = \frac{26}{9} \cdot 3^a$$

즉 $\frac{26}{9} \cdot 3^a = 3$이므로 $3^a = \frac{27}{26}$

따라서 점 A의 y좌표는

$$3^{a+1} = 3 \cdot 3^a = 3 \cdot \frac{27}{26} = \frac{81}{26}$$

점 B는 점 A를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로
$\overline{AB} = 3$

Ⓐ 010 답 ②

지수함수 $y = 2^{2x+a} + b$의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y = 2$이므로 $b = 2$

$$\therefore y = 2^{2x+a} + 2$$

$y = 2^{2x+a} + 2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $f(x) = 2^{-2x+a} + 2$

이 그래프가 점 $(-1, 10)$을 지나므로

$$10 = 2^{2+a} + 2, \qquad 2^{2+a} = 8 = 2^3$$

$$2 + a = 3 \qquad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 3$$

Ⓐ 011 답 ②

함수 $f(x) = a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$g(x) = a^{-(x-m)}$$

조건 ㈎에 의하여 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프는 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이므로 $f(1) = g(1)$

즉 $a = a^{-(1-m)}$이므로 $a = a^{m-1}$

$$1 = m - 1 \qquad \therefore m = 2$$

조건 ㈏에 의하여 $a^3 = 16a^{-(3-2)}$이므로

$$a^3 = \frac{16}{a}, \qquad a^4 = 16 \qquad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

$$\therefore a + m = 4$$

Ⓐ 012 답 31

함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} - 64$의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -64만큼 평행이동시킨 것이다.

이때 함수 $y = f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y = -64$이고 $y = 0$일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} - 64 = 0$에서

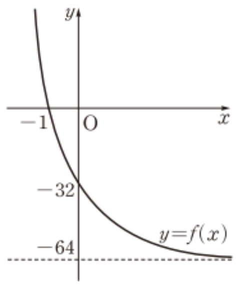
$$2^{-x+5} = 64 = 2^6, \qquad -x + 5 = 6 \qquad \therefore x = -1$$

다큐 Board

$x=0$일 때,

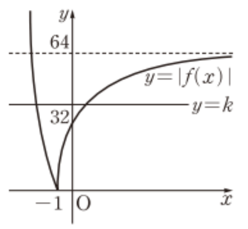
$$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-64$$
$$=2^5-64$$
$$=-32$$

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 -1, y절편은 -32이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y=|f(x)|$
$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64 & (x<-1)\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}+64 & (x\ge -1)\end{cases}$$



이때 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나기 위해서는 $32<k<64$이어야 하므로 구하는 자연수 k의 개수는

$$64-32-1=31$$

보충학습

$y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같이 그린다.
(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
(ii) $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고,
$y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

Ⓐ 013 답 ④

$A(a,\ 2^a)$이므로 점 B의 y좌표는 2^a이다.

점 B의 x좌표는 $2^a=15\cdot 2^{-x}$에서

$$2^{x+a}=15 \qquad \therefore x=\log_2 15-a$$

$a>0$, $a\ne 1$, $b>0$일 때,
$a^x=b \Longleftrightarrow x=\log_a b$

즉 $B(\log_2 15-a,\ 2^a)$이고 $\overline{AB}=2a-\log_2 15$이므로

$1<\overline{AB}<100$에서

$$1<2a-\log_2 15<100$$
$$\frac{1}{2}(1+\log_2 15)<a<\frac{1}{2}(100+\log_2 15)$$
$$\therefore 2.\times\times\times<a<51.\times\times\times$$

$\log_2 8<\log_2 15<\log_2 16$,
즉 $3<\log_2 15<4$이므로
$\frac{1}{2}(1+\log_2 15)$
$=2.\times\times\times$
$\frac{1}{2}(100+\log_2 15)$
$=51.\times\times\times$

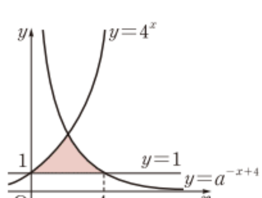
따라서 구하는 자연수 a는 3, 4, $\cdots$, 51의 49개이다.

Ⓐ 014 답 15

$f(x)=4^x$, $g(x)=a^{-x+4}$이라 하자.

$a^{-x+4}=1$에서 $\quad -x+4=0 \quad \therefore x=4$

함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



색칠한 영역에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4일 때, y좌표가 정수인 점의 개수의 합이므로

(i) x좌표가 0일 때,
(0, 1)의 1개

(ii) x좌표가 1일 때,
$f(1)=4$, $g(1)=a^3$이고 $a^3>4$이므로

a는 $a>1$인 자연수

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 4개

(iii) x좌표가 2일 때,
$f(2)=16$, $g(2)=a^2$이므로
$a^2<16$이면 (2, 1), (2, 2), $\cdots$, $(2,\ a^2)$의 a^2개
$a^2\ge 16$이면 (2, 1), (2, 2), $\cdots$, (2, 16)의 16개

(iv) x좌표가 3일 때,
$f(3)=64$, $g(3)=a$이고 $a<64$이므로

$a\ge 64$인 경우 점의 개수가 20 이상 40 이하인 조건을 만족시키지 않는다.

(3, 1), (3, 2), $\cdots$, $(3,\ a)$의 a개

(v) x좌표가 4일 때,
(4, 1)의 1개

(i)~(v)에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는
a^2+a+6 또는 $a+22$

$1+4+a^2+a+1$
$1+4+16+a+1$

$20\le a^2+a+6\le 40$이면 $\quad 14\le a^2+a\le 34$

이때 $a^2<16$에서 $a<4$이므로 자연수 a의 값이 존재하지 않는다.

$a=2$일 때, $\quad a^2+a=6$
$a=3$일 때, $\quad a^2+a=12$

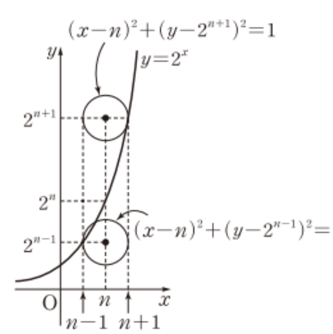
$20\le a+22\le 40$이면 $\quad -2\le a\le 18$

이때 $a^2\ge 16$에서 $a\ge 4$이므로 $\quad 4\le a\le 18$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 4, 5, $\cdots$, 18의 15개이다.

Ⓐ 015 답 196

$(x-a)^2+(y-b)^2=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$(x-a)^2+(y-b)^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡



$a=n$ (n은 자연수)일 때, 곡선 $y=2^x$이 원 ㉠과 만날 때의 가능한 b의 값의 범위를 구하면 $(x-n)^2+(y-b)^2=1$에서 $b=2^{n-1}$일 때 곡선 위의 점 $(n-1,\ 2^{n-1})$에서 곡선과 원이 처음으로 만나고 $b=2^{n+1}$일 때 곡선 위의 점 $(n+1,\ 2^{n+1})$에서 곡선과 원이 마지막으로 만나므로 원 ㉠이 곡선과 만나게 되는 b의 값의 범위는

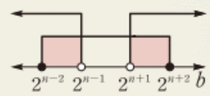
곡선 $y=2^x$과 원 ㉠이 만나지 않는 b의 값의 범위는
$b<2^{n-1}$ 또는 $b>2^{n+1}$
(단, b는 자연수)

$$2^{n-1}\le b\le 2^{n+1} \text{ (단, } b\text{는 자연수)}$$

마찬가지로 곡선 $y=2^x$이 원 ㉡과 만날 때의 가능한 b의 값의 범위를 구하면 $(x-n)^2+(y-b)^2=4$에서 $b=2^{n-2}$일 때 곡선 위의 점 $(n-2,\ 2^{n-2})$에서 곡선과 원이 처음으로 만나고 $b=2^{n+2}$일 때 곡선 위의 점 $(n+2,\ 2^{n+2})$에서 곡선과 원이 마지막으로 만나므로 원 ㉡이 곡선과 만나게 되는 b의 값의 범위는

$2^{n-2}\le b\le 2^{n+2}$ (단, b는 자연수)

따라서 곡선 $y=2^x$이 원 ㉠과는 만나지 않고 원 ㉡과는 적어도 한 점에서 만나므로 b의 값의 범위는



$2^{n-2}\le b<2^{n-1}$ 또는 $2^{n+1}<b\le 2^{n+2}$

$a=1$일 때, $2^2<b\le 2^3$

$a=2$일 때, $2^0\le b<2^1$ 또는 $2^3<b\le 2^4$

$a=3$일 때, $2^1\le b<2^2$ 또는 $2^4<b\le 2^5$

$a=4$일 때, $2^2\le b<2^3$ 또는 $2^5<b\le 2^6$

$a=5$일 때, $2^3\le b<2^4$ 또는 $2^6<b\le 100$

$a=6$일 때, $2^4\le b<2^5$

$a=7$일 때, $2^5\le b<2^6$

$a=8$일 때, $2^6\le b\le 100$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)+(2^3+36)+2^4+2^5+37$$
$$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36+37$$
$$=\frac{1(2^6-1)}{2-1}+\frac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73$$
$$=63+60+73$$
$$=196$$

Ⓐ 016 답 32

지수함수 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 $f(3)$을 갖는다.

(밑)$=2>1$이므로 함수 $f(x)$는 증가하는 함수

$\therefore\ a=f(3)$
$=2^3=8$

한편 지수함수 $g(x)$는 감소하는 함수이므로 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 $g(-1)$을 갖는다.

$0<$(밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $g(x)$는 감소하는 함수

$\therefore\ b=g(-1)$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$\therefore\ ab=32$

Ⓐ 017 답 ⑤

$0<a<1$이므로 함수 $f(x)=a^x$은 감소하는 함수이다.

따라서 닫힌 구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)$, $x=-2$일 때 최댓값 $f(-2)$를 갖는다.

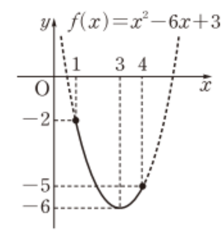
즉

$$f(1)=a=\frac{5}{6}$$

이므로

$$M=f(-2)=a^{-2}$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\frac{36}{25}$$
$$\therefore\ a\times M=\frac{5}{6}\times\frac{36}{25}=\frac{6}{5}$$

Ⓐ 018 답 ④



$f(x)=x^2-6x+3$
$=(x-3)^2-6$

이므로 $1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 $f(3)=-6$, $x=1$일 때 최댓값 $f(1)=-2$를 갖는다.

$\therefore\ -6\le f(x)\le -2$

(i) $0<a<1$일 때,

$(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은 감소하는 함수이므로 $f(x)=-6$일 때 최댓값을, $f(x)=-2$일 때 최솟값을 갖는다.

즉 $a^{-6}=27=3^3$이므로

$$a=(3^3)^{-\frac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\therefore\ m=a^{-2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=3$$

(ii) $a>1$일 때,

$(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은 증가하는 함수이므로 $f(x)=-2$일 때 최댓값을, $f(x)=-6$일 때 최솟값을 갖는다.

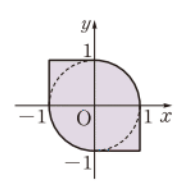
즉 $a^{-2}=27=3^3$이므로

$$a=(3^3)^{-\frac{1}{2}}=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

그런데 $a=\frac{\sqrt{3}}{9}$은 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=3$

Ⓐ 019 답 160

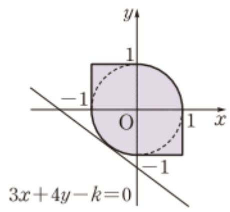


집합 $A\cup B$를 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$에서 $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$3x+4y$가 최솟값을 가질 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+4y}$은 최댓값을 갖는다.

$3x+4y=k$ (k는 상수)로 놓으면 직선 $3x+4y-k=0$이 제3사분면에서 원 $x^2+y^2=1$과 접할 때, k의 값이 최소이다. 이때 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로



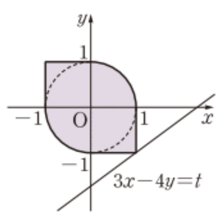
$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1,\qquad |k|=5$$

$\therefore\ k=-5\ (\because\ k<0)$

$\therefore\ M_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$

또 2^{3x-4y}에서 $2>1$이므로 $3x-4y$가 최댓값을 가질 때, 2^{3x-4y}도 최댓값을 갖는다.

$3x-4y=t$ (t는 상수)로 놓으면 직선 $3x-4y=t$가 점 $(1,\ -1)$을 지날 때, t의 값이 최대이므로



$t=3\cdot1-4\cdot(-1)=7$

$\therefore\ M_2=2^7=128$

$\therefore\ M_1+M_2=32+128=160$

Ⓐ 020 답 ④

$\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$에서 $\frac{(2^4)^x}{2}=2^{x+3}$

$\frac{2^{4x}}{2}=2^{x+3},\qquad 2^{4x-1}=2^{x+3}$

$4x-1=x+3,\qquad 3x=4$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$

Ⓐ 021 답 ③

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\sqrt[3]{4}$에서 $2^{1-x}=2^{\frac{2}{3}}$

$1-x=\frac{2}{3}$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

Ⓐ 022 답 10

$(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$에서

$2^x-8=0$ 또는 $3^{2x}-9=0$

$\therefore\ 2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$2^x=8$에서

$2^x=2^3\qquad \therefore\ x=3$

$3^{2x}=9$에서

$3^{2x}=3^2,\qquad 2x=2\qquad \therefore\ x=1$

다큐 Board

$\alpha=3,\ \beta=1$ 또는 $\alpha=1,\ \beta=3$

점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

➔ $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$k=0$일 때, $n=7\cdot1=7$
$k=1$일 때, $n=7\cdot2=14$
$k=2$일 때, $n=7\cdot2^2=28$
$k=3$일 때, $n=7\cdot2^3=56$
$k=4$일 때, $n=7\cdot2^4=112$
따라서 두 자리 자연수 n은 14, 28, 56

$f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k>0$

$\therefore\ k<\frac{25}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=(2^{-1})^{x-1}=2^{1-x}$,

$\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$이므로

$2^{1-x}=2^{\frac{2}{3}}$

따라서 주어진 방정식의 두 실근은 $x=3$ 또는 $x=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

Ⓐ 023 답 98

$2^{x+3}-2^x=n$에서 $2^3\cdot2^x-2^x=n$

$\therefore\ 7\cdot2^x=n$ …… ㉠

㉠이 정수인 해를 갖기 위해서는

$n=7\cdot2^k$ (k는 음이 아닌 정수)

꼴이어야 한다.

위의 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 n은 14, 28, 56이므로 모든 두 자리 자연수 n의 값의 합은

$14+28+56=98$

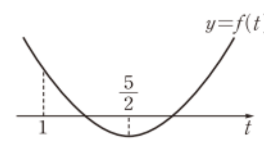
Ⓐ 024 답 ②

$5^{2x}-5^{x+1}+k=0$에서 $5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t+k=0$ …… ㉠

이때 $x>0$이면 $t>1$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-5t+k$로 놓으면 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(1)=1-5+k>0$에서 $k>4$

(ii) $f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+k<0$에서

$\frac{25}{4}-\frac{25}{2}+k<0,\qquad -\frac{25}{4}+k<0$

$\therefore\ k<\frac{25}{4}$

(i), (ii)에서 $4<k<\frac{25}{4}$이므로 구하는 정수 k는 5, 6의 2개이다.

보충학습

이차방정식의 근의 분리

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$에서 $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$라 할 때,

① 두 근이 모두 p보다 크다.

$\iff D\ge0,\ f(p)>0,\ p<-\frac{b}{2a}$

② 두 근이 모두 p보다 작다.

$\iff D\ge0,\ f(p)>0,\ p>-\frac{b}{2a}$

③ 두 근 사이에 p가 있다.

$\iff f(p)<0$

④ 두 근이 $p,\ q\ (p<q)$ 사이에 있다.

$\iff D\ge0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\frac{b}{2a}<q$

Ⓐ 025 답 ④

$9^x-11\times3^x+28=0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-11t+28=0,\qquad (t-4)(t-7)=0$

$9^x=(3^2)^x=(3^x)^2=t^2$

$\therefore\ t=4$ 또는 $t=7$

주어진 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 $3^\alpha=4,\ 3^\beta=7$이라 하면

$9^\alpha+9^\beta=3^{2\alpha}+3^{2\beta}=(3^\alpha)^2+(3^\beta)^2$

$=16+49=65$

Ⓐ 026 답 36

$2^x-2^{-x}=t$로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=t^2+2$

이므로 주어진 방정식은

$(t^2+2)+at+7=0$

$\therefore\ t^2+at+9=0$ …… ㉠

이때 $t=2^x-2^{-x}$이 모든 실숫값을 가질 수 있으므로 주어진 방정식이 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-36\ge0,\qquad (a+6)(a-6)\ge0$

$\therefore\ a\le-6$ 또는 $a\ge6$

따라서 양수 a의 최솟값은 6이므로

$m=6\qquad \therefore\ m^2=36$

Ⓐ 027 답 ②

$\mathrm{P}(k,\ a^k),\ \mathrm{Q}(k,\ a^{2k}),\ \mathrm{R}(k,\ k)$라 하면

$k=2$일 때, $a^{2k}=k$이므로 $\qquad a^4=2$

$\therefore\ a=2^{\frac{1}{4}}\ (\because\ a>1)$

ㄱ. $k=4$이면

$a^{2k}=a^8=(2^{\frac{1}{4}})^8=4=k$

따라서 점 Q와 점 R는 일치한다.

ㄴ. $\overline{\mathrm{PQ}}=|a^{2k}-a^k|=|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}|=12$에서

$2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$로 놓으면 $|t^2-t|=12$이므로

$t^2-t=12$ 또는 $t^2-t=-12$

(ⅰ) $t^2-t=12$일 때,

$(t-4)(t+3)=0$에서 $\qquad t=4\ (\because\ t>0)$

즉 $2^{\frac{k}{4}}=4$이므로 $\qquad 2^{\frac{k}{4}}=2^2$

$\frac{k}{4}=2\qquad \therefore\ k=8$

(ⅱ) $t^2-t=-12$일 때,

$t^2-t+12=0$에서

$t^2-t+12=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{47}{4}>0$이므로 방정식을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않는다.

따라서 실수 k도 존재하지 않는다.

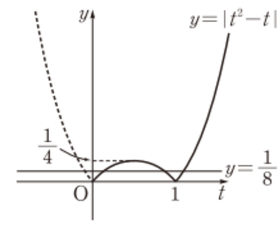
(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=8$이므로 $\qquad \mathrm{Q}(8,\ 16),\ \mathrm{R}(8,\ 8)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=8$

ㄷ. $\overline{\mathrm{PQ}}=|a^{2k}-a^k|=|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}|$에서 $2^{\frac{k}{4}}=t\ (t>0)$로 놓으면

$\overline{\mathrm{PQ}}=|t^2-t|$

이때 $y=|t^2-t|=\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 3개이므로 실수 k의 값도 3개이다.

$t>0$에서 $y=|t^2-t|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}$의 교점의 t좌표

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ 028 답 ⑤

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le5^{x+4}$에서 $\qquad 5^{2x-1}\le5^{x+4}$

이때 밑이 1보다 크므로

$2x-1\le x+4$

$\therefore\ x\le5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

Ⓐ 029 답 ③

$(3^x-5)(3^x-100)<0$에서

$5<3^x<100$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$5<3^x<100$에서
$3^x=9,\ 27,\ 81$
$\therefore\ x=2,\ 3,\ 4$

$2+3+4=9$

Ⓐ 030 답 ①

$4^{-x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$에서 $\qquad 2^{-2x^2}>2^{-4x}$

이때 밑이 1보다 크므로 $\qquad -2x^2>-4x$

$2x^2<4x,\qquad 2x^2-4x<0$

$2x(x-2)<0$

$\therefore\ 0<x<2$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=2$이므로

$\alpha+\beta=2$

다큐 Board

031 답 ⑤

$x \geq 0,\ y \geq 0$ …… ㉠

$2^y \leq 4^{2-x}$에서 $2^y \leq 2^{-2x+4}$

이때 밑이 1보다 크므로

$y \leq -2x+4$ …… ㉡

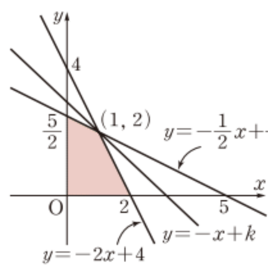
$\left(\frac{1}{4}\right)^y \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2y} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$

이때 밑이 1보다 작으므로

$2y \leq -x+5$

$\therefore y \leq -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$x+y=k$ (k는 상수)로 놓으면 $y=-x+k$

이 직선이 두 직선 $y=-2x+4$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$의 교점 $(1, 2)$를 지날 때 $x+y$의 값이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$1+2=3$

032 답 15

$y=f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ $(a>0)$라 하면 $f(-5)=0$에서

$f(-5)=-5a+b=0$ …… ㉠

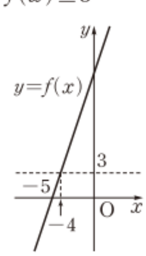
$2^{f(x)} \leq 8=2^3$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x) \leq 3$

이때 $f(x) \leq 3$의 해가 $x \leq -4$이므로 오른쪽 그림에서

$f(-4)=3$

임을 알 수 있다.

$\therefore f(-4)=-4a+b=3$ …… ㉡



㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=15$

㉡−㉠을 하면 $a=3$
$\therefore b=5a=15$

$\therefore f(0)=b=15$

다른풀이 일차함수 $f(x)$에 대하여 $f(-5)=0$이므로

$f(x)=a(x+5)\,(a>0)$로 놓으면

$2^{f(x)} \leq 8$에서 $2^{f(x)} \leq 2^3$

이때 밑이 1보다 크므로 $f(x) \leq 3$

$\therefore a(x+5) \leq 3$

$a>0$이므로 $x+5 \leq \frac{3}{a}$ $\quad \therefore x \leq \frac{3}{a}-5$

즉 주어진 부등식의 해가 $x \leq \frac{3}{a}-5$이므로

$\frac{3}{a}-5=-4,\quad \frac{3}{a}=1 \quad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3(x+5)$이므로 $f(0)=15$

033 답 103

$4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n \leq 1$에서

$4^k-(2^n+4^n)2^k+8^n$

$=(2^k)^2-(2^n+2^{2n})2^k+2^{3n}$

$=(2^k-2^n)(2^k-2^{2n})$

이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n}) \leq 1$

(i) $k<n$일 때,

$2^k-2^n<-1,\ 2^k-2^{2n}<-1$이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n})>1$

(ii) $n \leq k \leq 2n$일 때,

$2^k-2^n \geq 0,\ 2^k-2^{2n} \leq 0$이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n}) \leq 0$

(iii) $k>2n$일 때,

$2^k-2^n>1,\ 2^k-2^{2n}>1$이므로

$(2^k-2^n)(2^k-2^{2n})>1$

(i), (ii), (iii)에서 $n \leq k \leq 2n$

$a_n=\sum_{k=1}^{2n} k-\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{2n(2n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{3}{2}n(n+1)$

이므로

$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A \neq B$)

$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)\right\}$

$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{63}$

따라서 $p=63,\ q=40$이므로

$p+q=103$

034 답 ③

$4^x-10\cdot 2^x+16 \leq 0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+16 \leq 0,\quad (t-2)(t-8) \leq 0$

$\therefore 2 \leq t \leq 8$

즉 $2 \leq 2^x \leq 2^3$이고 밑이 1보다 크므로

$1 \leq x \leq 3$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$1+2+3=6$

Ⓐ **035** 답 18

$9^x-3^{x+2}+18<0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-9t+18<0, \quad (t-3)(t-6)<0$

$\therefore 3<t<6$

즉 $3<3^x<6$이므로 $\quad 1<x<\log_3 6$

따라서 $\alpha=1,\ \beta=\log_3 6$이므로

$3^\alpha\cdot 3^\beta=3^1\cdot 3^{\log_3 6}=3\cdot 6=18$

단축Key
$t^2-9t+18<0$의 해가 $3^\alpha<t<3^\beta$이므로 $3^\alpha\cdot 3^\beta=18$

Ⓐ **036** 답 ④

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서

$2^{2f(x)}-2\cdot 2^{f(x)}-8<0$

$2^{f(x)}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8<0, \quad (t+2)(t-4)<0$

$\therefore -2<t<4$

이때 $t>0$이므로 $\quad 0<t<2^2$

즉 $0<2^{f(x)}<2^2$에서 밑이 1보다 크므로

$f(x)<2, \quad x^2-x-4<2$

$x^2-x-6<0, \quad (x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개이다.

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

02 로그함수

Ⓐ **037** 답 ②

곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$\log_2 b=2 \quad \therefore b=2^2=4$

또 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$\log_2(-a+b)=0, \quad -a+b=1$

$\therefore a=3$

$\therefore a+b=7$

Ⓐ **038** 답 ①

$g(2)=2^2=4$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=2^4=16$

$h(2)=\log_2 2=1$이므로

$(g\circ h)(2)=g(h(2))=g(1)=1$

$\therefore (f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)=17$

Ⓐ **039** 답 ②

$y=a^{-x-2}$에 $y=1$을 대입하면

$\underbrace{1=a^{-x-2}}_{a^0=1}, \quad -x-2=0 \quad \therefore x=-2$

$\therefore \mathrm{A}(-2,\ 1)$

$y=\log_a(x-2)$에 $y=1$을 대입하면

$\underbrace{1=\log_a(x-2)}_{\log_a a=1}, \quad x-2=a \quad \therefore x=a+2$

$\therefore \mathrm{B}(a+2,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AB}}=|a+4|=8$이므로 $\quad a+4=\pm 8$

$\overline{\mathrm{AB}}$는 x축에 평행하므로 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 두 점 A, B의 x좌표의 차와 같다.

$\therefore a=4\ (\because a>1)$

다른풀이 $y=a^{-x-2}$에 $y=1$을 대입하면

$1=a^{-x-2}, \quad -x-2=0 \quad \therefore x=-2$

$\therefore \mathrm{A}(-2,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AB}}=8$, 즉 두 점 A, B의 x좌표의 차가 8이므로 점 B의 x좌표는 6이다.

따라서 $\mathrm{B}(6,\ 1)$이 곡선 $y=\log_a(x-2)$ 위의 점이므로

$\log_a(6-2)=1, \quad \log_a 4=1$

$\therefore a=4$

Ⓐ **040** 답 70

$y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)=\log_3\frac{x-9}{9}$

$=\log_3(x-9)-\log_3 9=\log_3(x-9)-2$

이므로 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=9,\ n=-2$이므로

$10(m+n)=70$

Ⓐ 041 답 7

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=-\log_2(-x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\log_2(-x)+k$$

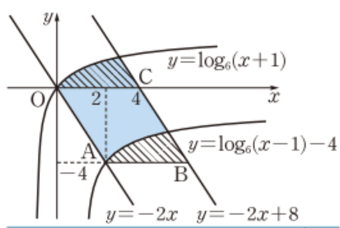
이 그래프가 점 $(-4,\ 5)$를 지나므로

$$5=-\log_2 4+k, \quad 5=-2+k \quad \therefore k=7$$

Ⓐ 042 답 16

$y=\log_6(x-1)-4$의 그래프는 $y=\log_6(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.



즉 구하는 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같으므로

$$4\cdot 4=16$$

$-2x+8=0$에서 $x=4$이므로 직선 $y=-2x+8$과 x축의 교점의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.
또 원점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(2,\ -4)$이므로 곡선 $y=\log_6(x-1)-4$와 직선 $y=-2x$의 교점의 좌표는 $(2,\ -4)$이다.

Ⓐ 043 답 ④

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\log_3(x-a)+2$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$x=\log_3(y-a)+2, \quad x-2=\log_3(y-a)$$

$$3^{x-2}=y-a \quad \therefore y=3^{x-2}+a$$

즉 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+a$이므로 $a=4$

Ⓐ 044 답 ③

$f(x)=0$에서 $\log_a(bx-1)=0$

$$bx-1=1 \quad \therefore x=\frac{2}{b}$$

즉 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$

한편

$$g(x)=\log_b(ax-1)=\log_b a\left(x-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\log_b\left(x-\frac{1}{a}\right)+\log_b a$$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{a}$

함수 $y=\log_a(x-m)+n$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 점근선의 방정식
➜ $x=m$

점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$은 곡선 $y=g(x)$의 점근선 $x=\frac{1}{a}$ 위의 점이므로 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}$ $\quad\therefore b=2a$

이때 $b>1$이므로 $2a>1$ $\quad\therefore a>\frac{1}{2}$

그런데 $0<a<1$이므로 $\frac{1}{2}<a<1$

따라서 a와 b 사이의 관계식은

$$b=2a\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$$

Ⓐ 045 답 6

$\overline{AB}=2$이고 점 A, B의 y좌표가 같으므로

$$\log_a 2=\log_b 4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 A의 x좌표가 2이고, $\overline{AB}=2$이므로 점 B의 x좌표는 $2+2=4$

$\overline{BC}=2$이므로 $\log_a 4-\log_b 4=2$

$$\log_a 4-\log_a 2=2\ (\because ㉠), \quad \log_a 2=2$$

$\log_a 4-\log_a 2$
$=2\log_a 2-\log_a 2$
$=\log_a 2$

$$a^2=2 \quad \therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>1)$$

㉠에서 $\log_{\sqrt{2}} 2=\log_b 4$

$$\log_b 4=2, \quad b^2=4 \quad \therefore b=2\ (\because b>a)$$

$$\therefore a^2+b^2=6$$

Ⓐ 046 답 ⑤

$A(0,\ 1)$이고 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$\log_2(x+1)-1=1$에서 $\log_2(x+1)=2$

$$x+1=4 \quad \therefore x=3$$

$$\therefore C(3,\ 1)$$

또 $B(0,\ -1)$이고 점 B, D의 y좌표가 같으므로

$3^{x+1}-2=-1$에서 $3^{x+1}=1$

$$x+1=0 \quad \therefore x=-1$$

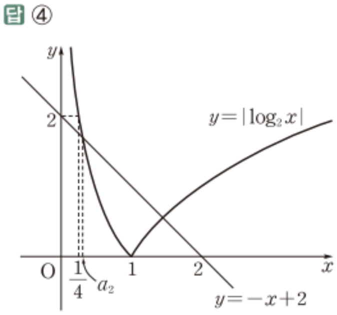
$$\therefore D(-1,\ -1)$$

따라서 $\overline{AC}=3$, $\overline{DB}=1$, $\overline{AB}=2$이므로 사각형 ADBC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 2=4$$

Ⓐ 047 답 ④

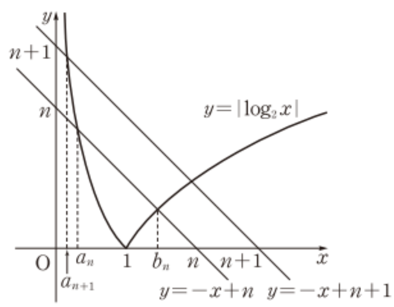
ㄱ.



$|\log_2 x|=2$에서 $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

$$\therefore a_2>\frac{1}{4}$$

ㄴ.



$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $0<a_{n+1}<a_n$이므로

$$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$$

ㄷ. $1<b_n<n$이므로 $\quad \dfrac{b_n}{n}<1$

또 $\log_2 b_n<\log_2 n$이고 $\log_2 b_n=-b_n+n$이므로

$$-b_n+n<\log_2 n$$
$$n-\log_2 n<b_n$$

양변을 n으로 나누면

$$1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n} \qquad \therefore 1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$$

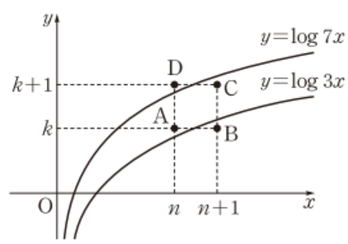
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다큐 Board

b_n은 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=\log_2 x$의 교점의 x좌표이므로
$-b_n+n=\log_2 b_n$

Ⓐ 048 답 79

다음 그림과 같이 주어진 조건을 만족시키는 정사각형을 ABCD라 하고 두 자연수 n, k에 대하여 $\mathrm{A}(n,\ k)$, $\mathrm{B}(n+1,\ k)$, $\mathrm{C}(n+1,\ k+1)$, $\mathrm{D}(n,\ k+1)$이라 하자.



이 정사각형 ABCD가 두 함수 $y=\log 7x$, $y=\log 3x$의 그래프와 모두 만나기 위해서는 점 D의 y좌표가 $\log 7n$보다 크거나 같고, 점 B의 y좌표가 $\log 3(n+1)$보다 작거나 같아야 하므로

$$\log 7n\leq k+1,\ \log 3(n+1)\geq k$$

를 만족시켜야 한다. 즉

$$n\leq\frac{10^{k+1}}{7},\ n\geq\frac{10^k}{3}-1$$
$$\therefore \frac{10^k}{3}-1\leq n\leq\frac{10^{k+1}}{7}$$

이때 조건 (나)에 의하여 $\quad k=1$ 또는 $k=2$

(i) $k=1$일 때, $\quad \dfrac{10}{3}-1\leq n\leq\dfrac{10^2}{7}$

$$\therefore \frac{7}{3}\leq n\leq\frac{100}{7}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 3, 4, …, 14의 12개이다.

(ii) $k=2$일 때, $\quad \dfrac{10^2}{3}-1\leq n\leq\dfrac{10^3}{7}$

$$\therefore \frac{97}{3}\leq n\leq\frac{1000}{7}$$

그런데 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이므로

$$n+1\leq 100,\ 즉\ n\leq 99$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 33, 34, …, 99의 67개이다.

(i), (ii)에서 구하는 정사각형의 개수는

$$12+67=79$$

닮음비가 $m:n$인 두 평면 도형의 넓이의 비
➜ $m^2:n^2$

Ⓐ 049 답 24

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:3$이므로

$$\triangle\mathrm{ADB}:\triangle\mathrm{AEC}=1:9$$
$$\therefore \square\mathrm{BDEC}=8\triangle\mathrm{ADB}=8\cdot\frac{9}{2}=36$$

$\square$BDEC
$=\triangle$AEC$-\triangle$ADB
$=9\triangle$ADB$-\triangle$ADB
$=8\triangle$ADB

한편 점 D, E의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$$\mathrm{B}(\alpha,\ \log_2\alpha^3),\ \mathrm{F}(\alpha,\ \log_2\alpha)$$
$$\mathrm{C}(\beta,\ \log_2\beta^3),\ \mathrm{G}(\beta,\ \log_2\beta)$$

따라서

$$\square\mathrm{BDEC}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\log_2\alpha^3+\log_2\beta^3)=36$$

이므로

$$\frac{3}{2}(\beta-\alpha)(\log_2\alpha+\log_2\beta)=36$$
$$(\beta-\alpha)(\log_2\alpha+\log_2\beta)=24$$
$$\therefore \square\mathrm{BFGC}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(2\log_2\alpha+2\log_2\beta)$$
$$=(\beta-\alpha)(\log_2\alpha+\log_2\beta)=24$$

$\overline{\mathrm{BF}}=\log_2\alpha^3-\log_2\alpha$
$=3\log_2\alpha-\log_2\alpha$
$=2\log_2\alpha$
$\overline{\mathrm{CG}}=\log_2\beta^3-\log_2\beta$
$=3\log_2\beta-\log_2\beta$
$=2\log_2\beta$

Ⓐ 050 답 ③

선분 PQ가 원 C의 지름이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점은 원의 중심 $\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$이다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, $\beta(\beta<\alpha)$라 하면

$$\mathrm{P}(\alpha,\ \log_a\alpha),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \log_a\beta)$$

이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{5}{4}$에서

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_a\alpha+\log_a\beta=0$에서 $\quad \log_a\alpha\beta=0$

$$\alpha\beta=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha=2,\ \beta=\frac{1}{2}\ (\because \beta<\alpha)$$

α, β를 두 근으로 하는 이차방정식을
$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$
이라 하면
$2t^2-5t+2=0$
에서
$(2t-1)(t-2)=0$
$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

점 P의 x좌표가 2이므로 점 P의 y좌표는 $\quad \dfrac{1}{2}$

$\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$에서
$y^2=\frac{13}{16}-\frac{9}{16}=\frac{1}{4}$
$\therefore y=\frac{1}{2}\ (\because y>0)$

이때 점 $\mathrm{P}\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$이 곡선 $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$$\frac{1}{2}=\log_a 2,\qquad 2=a^{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore a=4$$

Ⓐ 051 답 23

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$에서 밑이 1보다 작으므로 $x+a$가 최소일 때 y는 최대이다. 즉 $x=4$일 때 y는 최댓값 -3을 가지므로

$-3=\log_{\frac{1}{3}}(4+a)$, $\quad 4+a=27$

$\therefore a=23$

Ⓐ 052 답 246

$f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 f(x)=\log_3 9+\log_3 x^{-2+\log_3 x}$

$=2+(-2+\log_3 x)\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\frac{1}{3}\le x\le 3$에서 $-1\le t\le 1$이고

$\log_3 f(x)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

$t=-1$일 때, $\log_3 f(x)$는 최댓값 5를 가지므로

$M=3^5=243$

$t=1$일 때, $\log_3 f(x)$는 최솟값 1을 가지므로

$m=3^1=3$

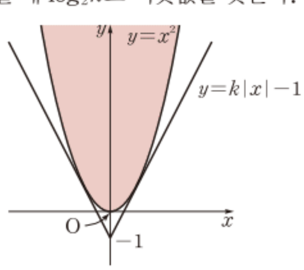
$\therefore M+m=246$

Ⓐ 053 답 ②

$\log_2(y+1)-\log_2|x|=\log_2\frac{y+1}{|x|}$에서

$\frac{y+1}{|x|}=k\ (k>0)$, 즉 $y=k|x|-1$로 놓으면 밑이 1보다 크므로 k가 최솟값을 가질 때 $\log_2 k$도 최솟값을 갖는다.

부등식 $y\ge x^2$의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=k|x|-1$이 접할 때, 즉 방정식 $x^2-k|x|+1=0$이 중근을 가질 때 k가 최솟값을 갖는다.



이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4=0$ $\quad \therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 구하는 최솟값은 $\quad \log_2 2=1$

Ⓐ 054 답 101

$y=|f(x)-g(x)|=|\log_2(x+10)-\log_{\frac{1}{2}}(x-10)|$

$=|\log_2(x+10)+\log_2(x-10)|=|\log_2(x^2-100)|$

구간 $(10, \infty)$에서 $x^2-100>0$이므로

$0<x^2-100<1$일 때, $\quad f(x)-g(x)<0$

$x^2-100\ge 1$일 때, $\quad f(x)-g(x)\ge 0$

따라서 함수 $y=|f(x)-g(x)|$의 최솟값은 0이다.

다큐 Board

기울기가 $m(m\ne 0)$인 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이다.

밑이 1보다 크므로 $(t-1)^2+1$이 최대일 때 $f(x)$도 최대이고, $(t-1)^2+1$이 최소일 때 $f(x)$도 최소이다.

점 (a, b)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (b, a)이다.

단축Key

$|f(x)-g(x)|\ge 0$이므로 $f(p)-g(p)=0$

즉 $\log_2(p^2-100)=0$에서 $p^2-100=1$

$\therefore p^2=101$

$\log_2(x^2-100)<0$이므로 $f(x)-g(x)<0$

$\log_2(x^2-100)\ge 0$이므로 $f(x)-g(x)\ge 0$

즉 $|f(p)-g(p)|=0$이므로

$\log_2(p^2-100)=0$, $\quad p^2-100=1$

$\therefore p^2=101$

Ⓐ 055 답 ①

$y=2^x-1$에서 $\quad 2^x=y+1 \quad \therefore x=\log_2(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\log_2(x+1)$

따라서 함수 $y=2^x-1$과 $y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또 직선 AB의 기울기가 -1이므로 직선 AB는 직선 $y=x$와 수직이다.

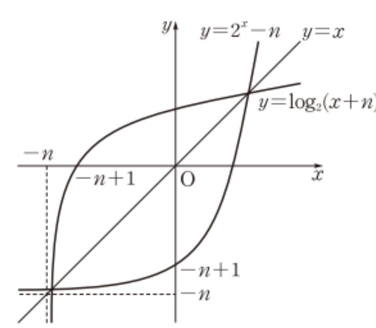
즉 점 B는 점 A(2, 3)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 $\quad$ B(3, 2)

따라서 C(2, 0), D(3, 0)이므로

$\square ACDB=\frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot 1=\frac{5}{2}$

Ⓐ 056 답 573

함수 $y=2^x-n$과 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 주어진 조건에 의하여 a_n은 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 직선 $y=x$ 위의 점의 개수이다. 즉 $x\ge 2^x-n$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하면 된다.



(i) $x\le 0$일 때 $-n+1\le x\le 0$이면 주어진 조건을 만족시키므로 $x\ge 2^x-n$을 만족시키는 정수 x의 개수는 n이다.

(ii) $x>0$일 때 $x\ge 2^x-n$에서 $2^x-x\le n$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하면 된다. $g(x)=2^x-x$라 하면

$g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=5$,

$g(4)=12$, $g(5)=27$, $g(6)=58$

이므로 $g(x)\le n$에서

$n=1$일 때, $\quad x=1$

$n=2, 3, 4$일 때, $\quad x=1, 2$

$n=5, 6, \cdots, 11$일 때, $\quad x=1, 2, 3$

$n=12, 13, \cdots, 26$일 때, $\quad x=1, 2, 3, 4$

$n=27, 28, 29, 30$일 때, $\quad x=1, 2, 3, 4, 5$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$n=1$일 때, $a_n=n+1$

$n=2, 3, 4$일 때, $a_n=n+2$

$n=5, 6, \cdots, 11$일 때, $a_n=n+3$

$n=12, 13, \cdots, 26$일 때, $a_n=n+4$

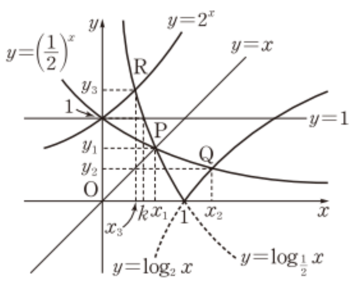
$n=27, 28, 29, 30$일 때, $a_n=n+5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n=\sum_{n=1}^{30} n+1\cdot1+3\cdot2+7\cdot3+15\cdot4+4\cdot5$$

$$=\frac{30\cdot31}{2}+1\cdot1+3\cdot2+7\cdot3+15\cdot4+4\cdot5$$

$$=465+108=573$$

Ⓐ **057** 답 ③



ㄱ. 직선 $y=1$과 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 교점의 x좌표를 k라 하면

$\log_{\frac{1}{2}} k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}<x_1<1$

ㄴ. 두 점 Q, R는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$x_2=y_3,\ x_3=y_2$ ······ ㉠

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=x_2x_3-x_3x_2=0$

두 점 Q, R는 각각 $y=\log_2 x$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 $y=2^x$의 교점이므로 두 점 Q, R는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 두 수 $x_2(x_1-1)$, $y_1(y_2-1)$의 대소 관계는

$\frac{y_1}{x_1-1}$, $\frac{x_2}{y_2-1}$의 대소 관계를 이용하여 구할 수 있다.

$\frac{y_1}{x_1-1}$은 두 점 $(1, 0)$, (x_1, y_1)을 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{x_2}{y_2-1}=\frac{y_3}{x_3-1}$ ($\because$ ㉠)은 두 점 $(1, 0)$, (x_3, y_3)을 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 $\frac{y_1}{x_1-1}>\frac{x_2}{y_2-1}$이므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$

$x_1-1<0$, $y_2-1<0$이므로 $(x_1-1)(y_2-1)>0$

따라서 $\frac{y_1}{x_1-1}>\frac{x_2}{y_2-1}$의 양변에 $(x_1-1)(y_2-1)$을 곱하면 $y_1(y_2-1)>x_2(x_1-1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ **058** 답 ①

두 함수 $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$\mathrm{P}(k, k)$라 하면

$\mathrm{Q}(2k, 2k)$

두 사각형 OAPB와 PCQD가 합동이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{PC}}=k$

$\therefore \mathrm{Q}(2k, 2k)$

따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$이므로

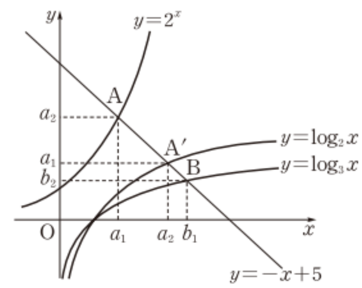
$2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$

$k^2-2k=0, \quad k(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

즉 $a^2=2$이므로 $\quad a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

Ⓐ **059** 답 ③



ㄱ. 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점을 A′이라 하면 $\quad \mathrm{A}'(a_2, a_1)$

$\therefore a_1>b_2$

ㄴ. 두 점 A, B는 직선 $y=-x+5$ 위의 점이므로

$a_1+a_2=b_1+b_2=5$

ㄷ. 직선 OA′과 직선 OB의 기울기에 의하여

$\frac{a_1}{a_2}>\frac{b_2}{b_1}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ **060** 답 ①

$y=\log_2 x$와 $y=2^x$은 서로 역함수 관계이므로 두 점 P_n과 Q_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore \mathrm{Q}_n(2^n, n)$

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 방정식은 $x+y-2^n-n=0$이므로 원점 O와 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 사이의 거리는 $\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}$

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $\quad \sqrt{2}(2^n-n)$ ($\because 2^n>n$)

좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}(2^n-n)$$

$$=\frac{4^n-n^2}{2}$$

$$\therefore 2\sum_{n=1}^{5} S_n=\sum_{n=1}^{5}(4^n-n^2)=\sum_{n=1}^{5}4^n-\sum_{n=1}^{5}n^2$$

$$=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{5\cdot6\cdot11}{6}$$

$$=1309$$

Ⓐ **061** 답 19

진수의 조건에서 $x-11>0$이므로 $\quad x>11$

$\log_3(x-11)=3\log_3 2$에서

$\log_3(x-11)=\log_3 2^3, \quad x-11=8$

$\therefore x=19$

다큐 Board

Ⓐ **062** 답 12

진수의 조건에서 $x-4>0$, $5x+4>0$이므로

$x>4$

$\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$에서

$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}\log_3(5x+4)$

$2\log_3(x-4)=\log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2=\log_3(5x+4)$

따라서 $(x-4)^2=5x+4$이므로

$x^2-13x+12=0$, $(x-1)(x-12)=0$

$\therefore x=12\ (\because x>4)$

$\therefore a=12$

$\log_9(5x+4)$
$=\log_{3^2}(5x+4)$
$=\frac{1}{2}\log_3(5x+4)$

Ⓐ **063** 답 14

진수의 조건에서 $x>0$, $x-7>0$이므로 $x>7$

$\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$에서

$\log_8\frac{x}{x-7}=\frac{1}{3}$, $\frac{x}{x-7}=8^{\frac{1}{3}}=2$

$x=2x-14$ $\therefore x=14$

Ⓐ **064** 답 ③

곡선 $y=2^x+5$의 점근선의 방정식은 $y=5$이므로

$y=\log_3 x+3$과 직선 $y=5$의 교점의 x좌표는

$\log_3 x+3=5$, $\log_3 x=2$

$\therefore x=3^2=9$

Ⓐ **065** 답 ②

세 수 1, $\log_2(2^x+1)$, $\log_2(4^x-1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2(2^x+1)=1+\log_2(4^x-1)$

$\log_2(2^x+1)^2=\log_2 2(4^x-1)$

따라서 $(2^x+1)^2=2(4^x-1)$이므로

$2^{2x}-2\cdot2^x-3=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$ $\therefore t=3\ (\because t>0)$

즉 $2^x=3$이므로 $x=\log_2 3$

$\therefore a=\log_2 3$

이때 $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$이므로

$1<a<2$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면
$b=\frac{a+c}{2}$

Ⓐ **066** 답 15

$\log_2(x-2)-\log_2 y=1$에서 $\log_2\frac{x-2}{y}=1$

$\frac{x-2}{y}=2$ $\therefore 2y=x-2$

$2^x-2\cdot4^{-y}=7$에서 $2^x-2\cdot2^{-2y}=7$

$2\cdot2^{-2y}=2\cdot2^{-x+2}=2^3\cdot2^{-x}$

$2^x-2^3\cdot2^{-x}-7=0$

양변에 2^x을 곱하면 $(2^x)^2-7\cdot2^x-8=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-7t-8=0$

$(t+1)(t-8)=0$ $\therefore t=8\ (\because t>0)$

즉 $2^x=8$이므로 $x=3$

$\therefore y=\frac{x-2}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $10\alpha\beta=15$

Ⓐ **067** 답 27

진수의 조건에서 $x>0$

$(\log_3 x)^2-6\log_3\sqrt{x}+2=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-3t+2=0$, $(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3$ 또는 $x=9$

$\therefore \alpha\beta=27$

단축Key
방정식
$(\log_3 x)^2-3\log_3 x+2=0$
에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_3\alpha+\log_3\beta=3$
$\log_3\alpha\beta=3$
$\therefore \alpha\beta=27$

Ⓐ **068** 답 32

$3^x=3^{2y}$에서 $x=2y$

$(\log_2 8x)(\log_2 4y)=-1$에 $x=2y$를 대입하면

$(\log_2 16y)(\log_2 4y)=-1$

$(4+\log_2 y)(2+\log_2 y)=-1$

$\log_2 y=t$로 놓으면

$(4+t)(2+t)=-1$, $t^2+6t+9=0$

$(t+3)^2=0$ $\therefore t=-3$

즉 $\log_2 y=-3$이므로 $y=\frac{1}{8}$

$\therefore x=2y=\frac{1}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{\alpha\beta}=32$

Ⓐ **069** 답 4

$x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$(\log_2 x)^2=2\log_2 x+3$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=-1$

따라서 $\log_2 x=3$ 또는 $\log_2 x=-1$이므로

$x=8$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha\beta=4$

단축Key
$x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$
$\log_2\alpha\beta=2$
$\therefore \alpha\beta=4$

Ⓐ **070** 답 23

$\log_3 x \cdot \log_2 y = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_3 y}{\log_3 2} = \log_2 x \cdot \log_3 y = 6$

이므로 $\log_2 x = X$, $\log_3 y = Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=5 \\ XY=6 \end{cases}$$

$Y=5-X$이므로
$XY=X(5-X)$
$\quad =-X^2+5X=6$
즉 $X^2-5X+6=0$에서
$(X-2)(X-3)=0$
$\therefore X=2$ 또는 $X=3$

$\therefore X=2,\ Y=3$ 또는 $X=3,\ Y=2$

즉 $\log_2 x=2$, $\log_3 y=3$ 또는 $\log_2 x=3$, $\log_3 y=2$이므로

$x=4,\ y=27$ 또는 $x=8,\ y=9$

따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은

$27-4=23$

Ⓐ **071** 답 11

진수의 조건에서 $7-x>0$, $7+x>0$이므로

$-7<x<7$ …… ㉠

$\log_2(7-x)+\log_2(7+x)>4$에서

$\log_2(7-x)(7+x)>4$

밑이 1보다 크므로

$(7-x)(7+x)>2^4$

$49-x^2>16, \quad x^2<33$

$\therefore -\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$

$\sqrt{25}<\sqrt{33}<\sqrt{36}$이므로
$5<\sqrt{33}<6$
$-6<-\sqrt{33}<-5$
$\therefore -5.\text{xxx}<x<5.\text{xxx}$

따라서 정수 x는 -5, -4, -3, $\cdots$, 5의 11개이다.

Ⓐ **072** 답 ①

진수의 조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log_5(x-1) \le \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑이 1보다 크므로

$x-1 \le \frac{1}{2}x+k, \quad \frac{1}{2}x \le k+1$

$\therefore x \le 2k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 1<x\le 2k+2$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이므로

$2k+2-1=3 \qquad \therefore k=1$

Ⓐ **073** 답 ②

$\frac{1}{3}<x<9$에서 $\quad \log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 9$

$\therefore -1<\log_3 x<2$ …… ㉠

$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$에서

$(\log_3 x+1)(\log_3 x-a)<0$

이고 이 부등식의 해가 ㉠이므로 $\quad a=2$

Ⓐ **074** 답 ②

진수의 조건에서 $|x-1|>0$이므로

$x \ne 1$ …… ㉠

$2\log_2|x-1| \le 1-\log_2 \frac{1}{2}$에서

$2\log_2|x-1| \le 2, \qquad \log_2|x-1| \le 1$

$\log_2|x-1| \le \log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\qquad |x-1| \le 2$

$-2 \le x-1 \le 2 \qquad \therefore -1 \le x \le 3$ …… ㉡

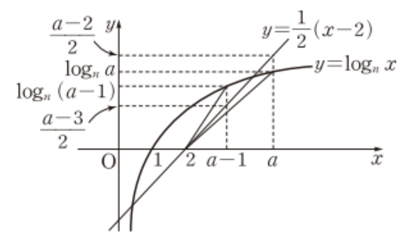
㉠, ㉡에서 $\qquad -1 \le x<1$ 또는 $1<x \le 3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 2, 3의 4개이다.

Ⓐ **075** 답 86

점 (2, 0)을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-2)$



조건 (나)에 의하여 두 점 (2, 0), $(a,\ \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{\log_n a}{a-2}$이므로

$\dfrac{\log_n a}{a-2} \le \dfrac{1}{2}$, 즉

$\log_n a \le \dfrac{a-2}{2}$ …… ㉠

두 점 (2, 0), $(a-1,\ \log_n(a-1))$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{\log_n(a-1)}{(a-1)-2}$이므로

$\dfrac{\log_n(a-1)}{(a-1)-2} > \dfrac{1}{2}$, 즉

$\log_n(a-1) > \dfrac{a-3}{2}$ …… ㉡

(i) $a=3$일 때,

㉠에서 $\quad \log_n 3 \le \frac{1}{2}, \quad 3 \le n^{\frac{1}{2}}$ ($\because n>3$)

양변을 제곱하면 $\quad n \ge 9$

또 ㉡에서 $\quad \log_n 2>0$

따라서 $n \ge 9$인 모든 자연수 n에 대하여

$f(n)=3$

(ii) $a=4$일 때,

㉠에서 $\quad \log_n 4 \le 1, \quad 4 \le n$ ($\because n>3$)

또 ㉡에서 $\quad \log_n 3>\frac{1}{2}, \quad n^{\frac{1}{2}}<3$ ($\because n>3$)

양변을 제곱하면 $\quad n<9$

다큐 Board

따라서 $4\le n<9$인 모든 자연수 n에 대하여

$f(n)=4$

(i), (ii)에서 $f(n)=\begin{cases}4 & (4\le n<9)\\ 3 & (n\ge 9)\end{cases}$

$$\therefore \sum_{n=4}^{30} f(n)=\sum_{n=4}^{8} f(n)+\sum_{n=9}^{30} f(n)=4\cdot 5+3\cdot 22=20+66=86$$

Ⓐ 076 답 81

진수의 조건에서 $x>0$

$(\log_3 x)(\log_3 3x)\le 20$에서

$(\log_3 x)(\log_3 x+1)\le 20$

$(\log_3 x)^2+\log_3 x-20\le 0$

$\log_3 3x=\log_3 3+\log_3 x$
$=1+\log_3 x$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2+t-20\le 0$, $(t+5)(t-4)\le 0$

$\therefore -5\le t\le 4$

즉 $-5\le \log_3 x\le 4$이고 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{243}\le x\le 81$

따라서 자연수 x의 최댓값은 81이다.

Ⓐ 077 답 ④

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2\ge 0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+t-2\ge 0$, $(t+2)(t-1)\ge 0$

$\therefore t\le -2$ 또는 $t\ge 1$

즉 $\log_2 x\le -2$ 또는 $\log_2 x\ge 1$이므로

$\log_2 x\le \log_2 2^{-2}$ 또는 $\log_2 x\ge \log_2 2$에서 밑이 1보다 크므로
$x\le \frac{1}{4}$ 또는 $x\ge 2$

$x\le \frac{1}{4}$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le \frac{1}{4}$ 또는 $x\ge 2$

Ⓐ 078 답 ②

10초일 때와 20초일 때의 열전도 계수를 구하면

$$k=C\frac{\log 20-\log 10}{202-200}=\frac{C\log 2}{2}$$

10초일 때와 x초일 때의 열전도 계수를 구하면

$$k=C\frac{\log x-\log 10}{206-200}=\frac{C(\log x-1)}{6}$$

즉 $\frac{C\log 2}{2}=\frac{C(\log x-1)}{6}$이므로

$3\log 2=\log x-1$

$\log x=3\log 2+1=\log 80$

$\therefore x=80$

Ⓐ 079 답 ①

메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있으므로 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은

$$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$$

이때 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}\le 30$에서

$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\le 3$

$\frac{1}{3}\log_2(n+1)\le 1$

$\log_2(n+1)\le 3$

밑이 1보다 크므로

$n+1\le 2^3$ $\therefore n\le 7$

따라서 n의 최댓값은 7이다.

Ⓐ 080 답 ②

처음 빵의 1개당 무게를 A라 하면 1번 시행 후 1개당 무게는 $0.9A$이므로 n번 시행 후 1개당 무게는 0.9^nA

또 처음 빵의 1개당 가격을 B라 하면 처음 빵의 단위 무게당 가격은 $\frac{B}{A}$이므로 n번 시행 후 단위 무게당 가격은

$$\frac{B}{0.9^nA}$$

이때 $\frac{B}{0.9^nA}\ge 1.5\frac{B}{A}$에서

$0.9^{-n}\ge 1.5$, $\left(\frac{10}{9}\right)^n\ge \frac{3}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log\frac{10}{9}\ge \log\frac{3}{2}$, $n(1-2\log 3)\ge \log 3-\log 2$

$$\therefore n\ge \frac{\log 3-\log 2}{1-2\log 3}=\frac{0.4771-0.3010}{1-2\times 0.4771}=3.8\times\times\times$$

따라서 구하는 n의 최솟값은 4이다.

Ⓐ 081 답 31

신호잡음전력비가 a일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_1이라 하면

$C_1=B\times\log_2(1+a)$

신호잡음전력비가 $33a$일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_2라 하면

$C_2=B\times\log_2(1+33a)$

이때 $C_2=2C_1$을 만족시키므로

$B\times\log_2(1+33a)=2B\times\log_2(1+a)$

$\log_2(1+33a)=\log_2(1+a)^2$

$1+33a=(1+a)^2$

$1+33a=a^2+2a+1$

$a^2-31a=0$, $a(a-31)=0$

$\therefore a=31$ ($\because a>0$)

Ⓐ **082** 답 ⑤

10 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g이므로

$$\log \frac{4}{10} = -1 + k\log 8$$

$$k\log 8 = \log \frac{4}{10} + 1$$

$$3k\log 2 = \log 4$$

$$3k\log 2 = 2\log 2$$

$$3k = 2 \qquad \therefore k = \frac{2}{3}$$

따라서 20 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27 %인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x g이라 하면

$$\log \frac{x}{20} = -1 + \frac{2}{3}\log 27$$

$$\log \frac{x}{20} = \log \frac{9}{10}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{9}{10} \qquad \therefore x = 18$$

따라서 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 18 g이다.

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\log \frac{4}{10} = \log 4 - \log 10 = \log 4 - 1$$

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때,

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$$

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 미분

Ⓐ **083** 답 ⑤

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x \to 0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^5 = e^5$$

Ⓐ **084** 답 ①

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x} = \lim_{x \to \infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Ⓐ **085** 답 ③

$$\lim_{x \to 0}\{(1+2x)(1-3x)\}^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x \to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}} \cdot (1-3x)^{\frac{1}{2x}}\}$$

$$= \lim_{x \to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}} \cdot \{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\}^{-\frac{3}{2}}]$$

$$= e \cdot e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Ⓐ **086** 답 ③

ㄱ. $x-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$= e \cdot 1 = e$$

ㄴ. $$\lim_{x \to \infty} f(x+1) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right) = e$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} f(x)f(x+1)$$

$$= \lim_{x \to \infty} f(x) \lim_{x \to \infty} f(x+1) = e \cdot e = e^2$$

ㄷ. $kx-1=t$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x \to \infty} f(kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{kx}{kx-1}\right)^{kx}$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른풀이 ㄱ. $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right\}^{\frac{x}{x-1}} = e$$

다큐 Board

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\frac{x+1}{x}}=e$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f(x)f(x+1)=e\cdot e=e^2$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty} f(kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{kx}{kx-1}\right)^{kx}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{kx-1+1}{kx-1}\right)^{kx}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}\right\}^{\frac{kx}{kx-1}}$

$=e$

Ⓐ **087** 답 ③

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot\dfrac{1}{3}$

$=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

Ⓐ **088** 답 ③

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}\cdot\sqrt{3}$

$=1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

Ⓐ **089** 답 6

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)+9x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}+\dfrac{9}{2}\right\}$

$=\dfrac{3}{2}\cdot1+\dfrac{9}{2}$

$=6$

Ⓐ **090** 답 ③

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(1+3x)-\log_4(1-2x)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\log_2(1+3x)}{x}-\dfrac{\log_4(1-2x)}{x}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left\{3\cdot\dfrac{\log_2(1+3x)}{3x}+2\cdot\dfrac{\log_4(1-2x)}{-2x}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{\ln2}+\dfrac{2}{\ln4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{\ln2}+\dfrac{2}{2\ln2}\right)=\dfrac{2}{\ln2}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$
$=\dfrac{1}{\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq1$)

Ⓐ **091** 답 ①

$x=\dfrac{1}{t}$로 놓으면 $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\dfrac{c}{x^2}\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2$

$t\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)
이고, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

즉 $\lim\limits_{t\to0}\ln(b+ct^2)=0$이므로

$\ln b=0$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ct^2}{t^a}\cdot\dfrac{\ln(1+ct^2)}{ct^2}$

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+ct^2)}{ct^2}=1$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ct^2}{t^a}=\lim\limits_{t\to0}ct^{2-a}$

$=2$

즉 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$2-a=0$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $\lim\limits_{t\to0}ct^{2-a}=\lim\limits_{t\to0}c=2$이므로 $\quad c=2$

$\therefore a+b+c=2+1+2=5$

Ⓐ **092** 답 ④

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\cdot4=1\cdot4=4$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}=1$ (단, $a\neq0$)

Ⓐ **093** 답 ②

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{6x}\cdot\dfrac{3x}{\ln(1+3x)}\cdot2$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}=\dfrac{1}{1}=1$

$=1\cdot1\cdot2$

$=2$

Ⓐ **094** 답 ④

$x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-e^{t}}{-t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^{t}-1}{t}=1$

Ⓐ **095** 답 12

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}+10x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(2\cdot\dfrac{e^{2x}-1}{2x}+10\right)$

$=2\cdot1+10$

$=12$

Ⓐ **096** 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+12)^x-a^x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+12)^x-1+1-a^x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{(a+12)^x-1}{x}-\dfrac{a^x-1}{x}\right\}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$
(단, $a>0$, $a\neq1$)

$=\ln(a+12)-\ln a$

$=\ln\dfrac{a+12}{a}=\ln3$

따라서 $\dfrac{a+12}{a}=3$이므로 $\quad a+12=3a$

$\therefore a=6$

Ⓐ **097** 답 ③

(ⅰ) $x>0$일 때

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이고 $\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ⅱ) $x<0$일 때

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$\lim_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이고 $\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}$에서 $3x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{3}}$$
$$=3\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$
$$=3\cdot1=3$$

> $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고
> $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$
> $=\alpha$ (α는 실수)
> 이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

Ⓐ **098** 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x$$
$$=1\cdot0=0$$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{3^x-1}{x}$

$$=1\cdot1\cdot\ln3=\ln3$$

ㄷ. [반례] $f(x)=|x|$이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이지만

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^{-x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)$$
$$=1\cdot(-1)=-1$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$이 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ **099** 답 ②

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$

$$\therefore a=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x(e^x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{e^x+1}$$
$$=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Ⓐ **100** 답 ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$을 만족시켜야 하므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+a}{x}=b$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^{2x}+a)=0$이므로

$a+1=0$

$\therefore a=-1$

또한 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2=2$이므로

$b=2$

$\therefore a+b=1$

Ⓐ **101** 답 ②

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\ne0,\ x>-1)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=f(0)g(0)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로

$b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{a}{1}=0$$

$\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로

$f(3)=9$

Ⓐ **102** 답 ④

> $y=e^x$ ➜ $y'=e^x$

$f'(x)=e^x+2x-3$이므로

$f'(0)=1+0-3=-2$

다큐 Board

Ⓐ **103** 답 ②

$f'(x)=4^x\ln 4-2^x-(x+2)2^x\ln 2+\ln 2$

이므로

$f'(1)=4\ln 4-2-6\ln 2+\ln 2$

$=8\ln 2-2-5\ln 2=3\ln 2-2$

> $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$
> ➔ $y'=a^x\ln a$

Ⓐ **104** 답 ④

$f'(x)=e^x(2x+1)+e^x\cdot 2=e^x(2x+3)$

이므로 $f'(1)=5e$

> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때
> $y=f(x)g(x)$
> ➔ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Ⓐ **105** 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2)+f(2)-f(2-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{-x}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

이고 $f'(x)=2^x+x\cdot 2^x\ln 2$이므로

$2f'(2)=2(4+8\ln 2)=8(1+2\ln 2)$

> $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
> $=f'(a)$

Ⓐ **106** 답 20

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-2}{h}=4$에서 $h\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{h\to 0}\{f(1-2h)-2\}=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\{f(1-2h)-2\}=f(1)-2=0$

$\therefore f(1)=2 \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}$

$=-2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}$

$=-2f'(1)=4$

이므로 $f'(1)=-2$

$f'(x)=\dfrac{ae^x}{e}$이므로 $f'(1)=a=-2$

㉠에서 $b=2-a=4$

$\therefore a^2+b^2=20$

Ⓐ **107** 답 14

$f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}+13=\ln x+14$이므로

$f'(1)=14$

Ⓐ **108** 답 9

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$이므로 $f'\left(\dfrac{1}{10}\right)=10-1=9$

Ⓐ **109** 답 ④

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)$

이고 $f'(x)=2x+\ln x+1$이므로

$3f'(1)=3\cdot 3=9$

Ⓐ **110** 답 ②

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)$

이고 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}$이므로 $2f'(3)=\dfrac{2}{3\ln 3}$

Ⓐ **111** 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하려면 $x=e$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to e-}(x+1)=\lim\limits_{x\to e+}(a\ln x+b)=f(e)$

$e+1=a+b$

$\therefore b=e+1-a \quad \cdots\cdots ㉠$

또 $f'(e)$가 존재해야 하므로

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(e+h)-f(e)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{e+h+1-(e+1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{h}{h}=1$

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(e+h)-f(e)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{a\ln(e+h)+b-(e+1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{a\ln(e+h)-a}{h}\ (\because ㉠)$

$=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{a\ln\left(1+\dfrac{h}{e}\right)}{h}=\dfrac{a}{e}$

에서 $1=\dfrac{a}{e} \quad \therefore a=e$

$a=e$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=e$

> 함수
> $F(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x\ge a)\end{cases}$가
> $x=a$에서 미분가능하면
> ① $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=g(a)$
> ② $\lim\limits_{x\to a-}f'(x)$
> $=\lim\limits_{x\to a+}g'(x)$

다른풀이 $f'(e)$가 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<e) \\ \dfrac{a}{x} & (x>e)\end{cases}$에서 $\lim\limits_{x\to e-}1=\lim\limits_{x\to e+}\dfrac{a}{x}$

$1=\dfrac{a}{e} \quad \therefore a=e$

Ⅱ. 삼각함수

04 삼각함수의 뜻과 그래프

Ⓐ 112 답 ②

반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 θ인 호 AB의 길이는 2θ이므로 부채꼴 PAB의 둘레의 길이는

$$2+2+2\theta=4+2\theta$$

반지름의 길이가 1인 원 O의 둘레의 길이는

$$2\pi\cdot 1=2\pi$$

부채꼴 PAB가 원 O에 접하며 한 바퀴 돌아서 중심 P가 제자리에 왔으므로 부채꼴 PAB의 둘레의 길이와 원 O의 둘레의 길이는 같다.

즉 $4+2\theta=2\pi$이므로 $\quad 2\theta=2\pi-4$

$$\therefore\ \theta=\pi-2$$

Ⓐ 113 답 ①

부채꼴 모양의 종이의 호의 길이는 원뿔 모양의 고깔모자의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 부채꼴 모양의 종이의 호의 길이는

$$2\pi\cdot 8=16\pi(\text{cm})$$

따라서 부채꼴 모양의 종이의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 16\pi=160\pi(\text{cm}^2)$$

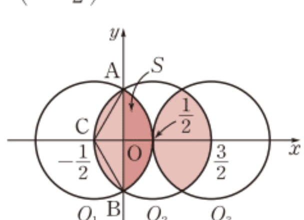
Ⓐ 114 답 ③

원 O_1의 방정식은 $\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$$

또 원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 방정식은 $\quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$



원 O_1의 중심을 C, 두 원 O_1, O_2의 교점을 각각 A, B라 하면 원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분의 넓이와 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분의 넓이의 합은 S의 4배와 같다.

> S
> $=$(부채꼴 CBA의 넓이)
> $-$(삼각형 CBA의 넓이)

부채꼴 CBA는 중심각의 크기가 $\angle\text{ACB}=\frac{2}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 1이므로 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

삼각형 CBA의 넓이는 $\quad \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}$

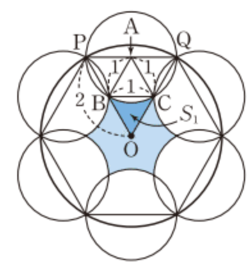
$$\therefore\ S=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분의 넓이와 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분의 넓이의 합은

$$4S=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

Ⓐ 115 답 ①

오른쪽 그림에서 삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, 삼각형 APB와 삼각형 ACQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로



S_1

$=$(삼각형 OPQ의 넓이)

$-\{$(삼각형 APB의 넓이)$+$(부채꼴 ABC의 넓이)

$+$(삼각형 ACQ의 넓이)$\}$

> 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이 ➜ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$=\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$6S_1=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-\pi$$

Ⓐ 116 답 ③

$\angle\text{B}_1\text{OC}_1=\theta$이므로 $\quad \angle\text{A}_1\text{OB}_1=\frac{\pi}{2}-\theta$

이때 $\overline{\text{OA}_1}=3$이므로 $\quad \widehat{\text{A}_1\text{B}_1}=3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

한편 $\overline{\text{B}_1\text{A}_2}=\overline{\text{OC}_1}=3\cos\theta$이므로

> $\widehat{\text{A}_1\text{B}_1}:\widehat{\text{A}_2\text{B}_2}$
> $=\overline{\text{OA}_1}:\overline{\text{B}_1\text{A}_2}$

$$\widehat{\text{A}_1\text{B}_1}:\widehat{\text{A}_2\text{B}_2}=3:3\cos\theta=1:\cos\theta$$

$$\therefore\ \widehat{\text{A}_2\text{B}_2}=\widehat{\text{A}_1\text{B}_1}\cos\theta$$

즉 수열 $\{\widehat{\text{A}_n\text{B}_n}\}$은 첫째항이 $3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이고, 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이므로

> 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은
> $a_n=ar^{n-1}$

$$\widehat{\text{A}_n\text{B}_n}=3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos^{n-1}\theta$$

이때 $0<\cos\theta<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\text{A}_n\text{B}_n}=\frac{3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\cos\theta}=9\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$3-3\cos\theta=1$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 B_1OC_1에서 $\overline{\text{OB}_1}=3$, $\overline{\text{OC}_1}=2$이므로

$$\overline{\text{B}_1\text{C}_1}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

다큐 Board

Ⓐ 117 답 ③

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(-3,\ 1)$, $(-3,\ -1)$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\ \csc\alpha+\sec\beta=\sqrt{10}+\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

Ⓐ 118 답 10

$x+2y=0$에서 $x=-2y$

$x=-2y$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$$5y^2=5\qquad \therefore\ y=\pm1$$

점 P는 제4사분면 위의 점이므로 $y=-1$

$y=-1$을 $x=-2y$에 대입하면 $x=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ -1)$이므로

$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt5},\ \cos\theta=\frac{2}{\sqrt5},\ \tan\theta=-\frac12$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt5(\sin\theta-2\cos\theta)}{\tan\theta}=\frac{\sqrt5\left(-\frac{1}{\sqrt5}-2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right)}{-\frac12}$$

$$=10$$

점 P$(a,\ b)$가
① 제1사분면 위의 점
➔ $a>0,\ b>0$
② 제2사분면 위의 점
➔ $a<0,\ b>0$
③ 제3사분면 위의 점
➔ $a<0,\ b<0$
④ 제4사분면 위의 점
➔ $a>0,\ b<0$

Ⓐ 119 답 ⑤

$\sin\theta+\cos\theta=\frac23$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac49$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac49,\qquad 2\sin\theta\cos\theta=-\frac59$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}$$

$$\therefore\ \sin^3\theta+\cos^3\theta$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\left(\frac23\right)^3-3\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)\cdot\frac23$$
$$=\frac{8}{27}+\frac59=\frac{23}{27}$$

보충학습

곱셈 공식의 변형
① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
③ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

Ⓐ 120 답 ②

$$\sin\theta\cdot\tan\theta=\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$\cos\theta=-\frac13$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac13\right)^2}{-\frac13}=\frac{\frac89}{-\frac13}=-\frac83$$

Ⓐ 121 답 ③

$\sin\theta-\cos\theta=\frac12$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac14$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac14,\qquad 2\sin\theta\cos\theta=\frac34$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac38$$

$$\therefore\ \sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac83$$

Ⓐ 122 답 18

$\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$에서

$$\log_2\sin\theta\cos\theta=-4$$

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$일 때,
$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

즉 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$이므로

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{16}=\frac98$$

한편 $\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\frac12(\log_2 x-4)$에서

$$2\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\log_2 x-4$$
$$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2 x-\log_2 2^4$$

즉 $\log_2\frac98=\log_2\frac{x}{16}$이므로

$$\frac98=\frac{x}{16}\qquad\therefore\ x=18$$

Ⓐ 123 답 ③

$\overline{OQ}=\cos\theta$, $\overline{AP}=\tan\theta$, $\overline{BQ}=\sin\theta$이므로

$\overline{OQ}=2\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$에서

$$\cos\theta=2\tan\theta\sin\theta,\qquad \cos\theta=2\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta$$

$$\cos^2\theta=2\sin^2\theta$$
$$\therefore\ \cot^2\theta=2$$

$$\therefore\ \csc\theta\cdot\sec\theta\cdot\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta$$
$$=1+\cot^2\theta=1+2=3$$

Ⓐ **124** 답 11

$\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$\therefore\ (\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$$

근의 공식을 이용하여 $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하면

$$\sin\theta\cos\theta=1\pm\sqrt{1-(-1)}=1\pm\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2}$$

$\sin\theta\cos\theta=\sin\theta+\cos\theta$에서 $-1\le\sin\theta\le1$, $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\sin\theta+\cos\theta\ne1+\sqrt{2}$

즉 $1-\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$이므로 $\quad a=1,\ b=-1$

$$\therefore\ 10a-b=11$$

Ⓐ **125** 답 ①

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 제2사분면 위의 점이므로

$a<0$이므로 $b=-\frac{4}{3}a>0$

$$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$$

직선의 기울기는 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$이므로

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$

$$=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta}=-\frac{5}{3}\ (\because\ \cos\theta<0)$$

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\ (\because\ \sin\theta>0)$$

$$\therefore\ \sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)=\sin\theta-\cos\theta$$

$$=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{7}{5}$$

Ⓐ **126** 답 ⑤

$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ⓐ **127** 답 ④

단축Key

$\tan198^\circ>0$이고 $-\frac{1}{a}<0$, $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}<0$이므로 ②, ⑤는 답이 될 수 없다.

$$\tan198^\circ=\tan(180^\circ+18^\circ)=\tan18^\circ=\frac{\sin18^\circ}{\cos18^\circ}$$

이때

$$\cos18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-a^2}\ (\because\ \cos18^\circ>0)$$

이므로

$$\tan198^\circ=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

다른풀이 $1+\tan^2 198^\circ=\sec^2 198^\circ=\frac{1}{\cos^2 198^\circ}$

$$=\frac{1}{\cos^2(180^\circ+18^\circ)}=\frac{1}{\cos^2 18^\circ}$$

$$=\frac{1}{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{1}{1-a^2}$$

따라서 $\tan^2 198^\circ=\frac{1}{1-a^2}-1=\frac{a^2}{1-a^2}$이므로

$$\tan198^\circ=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\ (\because\ \tan198^\circ>0)$$

Ⓐ **128** 답 ②

직선 $x-3y+3=0$의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로

$$\tan\theta=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$$

$$=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta$$

$$=-\tan\theta=-\frac{1}{3}$$

Ⓐ **129** 답 ②

ㄱ. [반례] $\alpha=2\pi-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}$이면

$\sin\alpha=\cos\beta$이지만

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{17}{6}\pi=\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

ㄴ. $\sin\alpha=\cos\beta$이므로

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

ㄷ. [반례] $\alpha=2\pi-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}$이면

$\sin\alpha=\cos\beta$이지만

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\alpha=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3},$$

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

보충학습

$\pi<\alpha<2\pi$, $\pi<\beta<2\pi$인 서로 다른 두 각 α, β에 대하여

$\alpha=\pi+\theta$, $\beta=\frac{3}{2}\pi-\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

또는 $\alpha=2\pi-\theta$, $\beta=\frac{3}{2}\pi-\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

일 때, $\sin\alpha=\cos\beta$가 성립한다.

Ⓐ **130** 답 ④

삼각형 OBC에서

$$\overline{\mathrm{BC}}=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

삼각형 OAD에서 $\angle\mathrm{OAD}=90^\circ$이므로

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{1}{\overline{\mathrm{OD}}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(삼각형 OCD의 넓이)$-$(부채꼴 OAB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot(-\tan\theta)-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\theta)$$

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$$

Ⓐ 131 답 6

$y=a\sin bx$의 그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로

$|a|=3$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

이때 주기는 $\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$

$\therefore b=2\ (\because b>0)$

$\therefore ab=6$

Ⓐ 132 답 ①

양수 a에 대하여 함수 $y=\cos ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$

이때 $y=\cos a(x+b)+1$의 그래프는 $y=\cos ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=\cos a(x+b)+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이다.

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi \qquad \therefore a=2$

또 $y=\cos a(x+b)+1$에서 $x=-b$일 때 $y=2$이므로

$y=\cos a(-b+b)+1$
$=\cos 0+1=2$

$-b=-\frac{\pi}{3}\ (\because 0<b<\pi) \qquad \therefore b=\frac{\pi}{3}$

$\therefore ab=\frac{2}{3}\pi$

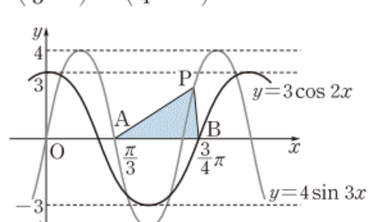
Ⓐ 133 답 ④

함수 $y=4\sin 3x$의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$

함수 $y=3\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

이때 $0<a<\frac{\pi}{2}<b<\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \mathrm{B}\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$



위의 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{12}\pi$이고 함수 $y=4\sin 3x$의 최댓값은 4이므로

(삼각형 ABP의 넓이)$\le\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}\pi\cdot 4=\frac{5}{6}\pi$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 생각하면 높이가 최대가 되는 경우에 삼각형 ABP의 넓이는 최대가 된다. 즉 점 P가 함수 $y=4\sin 3x$가 최대 또는 최소가 되는 점에 위치할 때, 삼각형 ABP의 넓이는 최대가 된다.

Ⓐ 134 답 ④

주어진 조건을 만족시키는 x좌표 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$의 범위를 구하면

$0<a_1<\frac{\pi}{2}$

$\pi<a_2<\frac{3}{2}\pi$

$2\pi<a_3<\frac{5}{2}\pi$

$\vdots$

$(n-1)\pi<a_n<\frac{2n-1}{2}\pi \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 각 변을 n으로 나누면

$\frac{n-1}{n}\pi<\frac{a_n}{n}<\frac{2n-1}{2n}\pi$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\pi\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\pi$이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\pi=\pi$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\pi=\pi$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$

보충학습

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ (α는 실수)일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

Ⓐ 135 답 ③

함수 $f(x)=\sin kx$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$

$\therefore f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)$

$=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)$

$=\sin(\pi+k\gamma)$

$=-\sin k\gamma$

$=-f(\gamma)=-\frac{3}{4}$

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}$이 만나는 점의 x좌표가 각각 α, β, γ이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=\frac{3}{4}$

보충학습

삼각함수의 그래프의 대칭성

① 함수 $f(x)=\sin x\ (0\le x<\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k\ (a\ne b) \rightarrow \frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2} \rightarrow a+b=\pi$

② 함수 $f(x)=\cos x\ (0\le x<2\pi)$에서

$f(a)=f(b)=k\ (a\ne b) \rightarrow \frac{a+b}{2}=\pi \rightarrow a+b=2\pi$

Ⓐ 136 답 10

직선 $x=\frac{1+5}{2}=3$에 대하여 함수 $y=a\cos bx$의 그래프가 대칭이므로 주기는 $2\cdot 3=6$

$\frac{2\pi}{|b|}=6$에서 $\quad |b|=\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=\pm\frac{\pi}{3}$

$y=a\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}x\right)=a\cos\frac{\pi}{3}x$이므로 $x=1$일 때,

$y=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

따라서 색칠한 도형의 넓이는 $\frac{a}{2}\cdot 4=20$이므로

$a=10$

Ⓐ **137** 답 ④

$f(x)=a\cos b\pi(x-c)+4.5$라 하면 만조 때의 해수면의 높이는 함수 $f(x)$의 최댓값 $a+4.5$이고, 간조 때의 해수면의 높이는 함수 $f(x)$의 최솟값 $-a+4.5$이다.
조차는 만조 때와 간조 때의 해수면 높이의 차이므로

$(a+4.5)-(-a+4.5)=8$

$2a=8 \quad \therefore a=4$

만조와 만조 또는 간조와 간조 사이의 시간이 함수 $f(x)$의 주기이다.
이때 만조 사이의 시간은

$17-4.5=12.5$

간조 사이의 시간은
$23.25-10.75=12.5$

$f(x)=4\cos b\pi(x-c)+4.5$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로

$\frac{2}{b}=12.5 \quad \therefore b=\frac{4}{25}$

함수 $f(x)=4\cos\frac{4}{25}\pi(x-c)+4.5$는 $x=4.5$일 때 최댓값 $4+4.5=8.5$를 가지므로

$4\cos\frac{4}{25}\pi(4.5-c)+4.5=8.5$

$4\cos\frac{4}{25}\pi(4.5-c)=4$
$\cos\frac{4}{25}\pi(4.5-c)=1$
$\frac{4}{25}\pi(4.5-c)=0$
$\therefore c=4.5$

$\therefore c=4.5 \ (\because 0<c<6)$

$\therefore a+100b+10c=4+16+45=65$

Ⓐ **138** 답 ⑤

$y=-4\cos^2x+4\sin x+3$
$=-4(1-\sin^2x)+4\sin x+3$
$=4\sin^2x+4\sin x-1$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

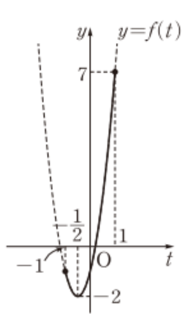
$y=4t^2+4t-1=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2$

따라서 $f(t)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2$라 하면 오른쪽 그림에서

$M=f(1)=7$,

$m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

$\therefore M+m=5$



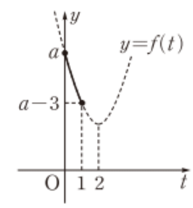
Ⓐ **139** 답 7

$y=\sin^2x-4\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+a$
$=\sin^2x-4\sin x+a$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le t\le 1$이고

$y=t^2-4t+a$
$=(t-2)^2+a-4$

따라서 $f(t)=(t-2)^2+a-4$라 하면 오른쪽 그림에서 $t=0$일 때 최댓값은 a, $t=1$일 때 최솟값은 $a-3$이므로



$a+(a-3)=11$

$2a=14$

$\therefore a=7$

Ⓐ **140** 답 ②

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
$=\sin^3x+3\sin^2x+2$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$f(t)=t^3+3t^2+2$

$f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$이고 $f'(t)=0$에서

$t=0 \ (\because -1\le t\le 1)$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	↘	2	↗	6

따라서 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$6+2=8$

Ⓐ **141** 답 ③

$y=x^2-2x\cos\theta-\sin^2\theta$
$=(x-\cos\theta)^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta$
$=(x-\cos\theta)^2-1$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$(\cos\theta, -1)$

이 점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$2\cos\theta=-1$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi \ (\because 0\le\theta<2\pi)$

따라서 구하는 합은

$\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$

142 답 7

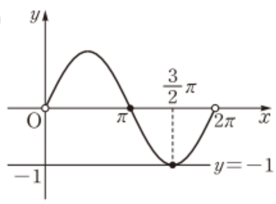
$\cos^2 x - \sin x = 1$에서 $(1-\sin^2 x) - \sin x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x + \sin x = 0$, $\sin x(\sin x + 1) = 0$

$\therefore \sin x = -1$ 또는 $\sin x = 0$

이때 $y=\sin x\ (0<x<2\pi)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$

이므로 $p=2,\ q=5$

$\therefore p+q=7$

143 답 256

$m=144,\ L=10,\ t=2$일 때

$h = 20 - 10\cos\frac{4\pi}{\sqrt{144}} = 20 - 10\cos\frac{\pi}{3}$

$= 20 - 10\cdot\frac{1}{2} = 15$ ...... ㉠

$m=a,\ L=5\sqrt{2},\ t=2$일 때

$h = 20 - 5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}$ ...... ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$20 - 5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}} = 15$, $5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}} = 5$

$\therefore \cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ...... ㉢

$a \geq 100$이므로 $\sqrt{a} \geq 10$이고 $0 < \frac{1}{\sqrt{a}} \leq \frac{1}{10}$에서

$0 < \frac{4\pi}{\sqrt{a}} \leq \frac{4\pi}{10} = \frac{2}{5}\pi$

따라서 ㉢을 만족시키려면 $\frac{4\pi}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{4}$이어야 하므로

$\sqrt{a} = 16$ $\therefore a = 256$

144 답 ②

$t=20$일 때, $T=18$이므로

$B - \frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\cdot 20\right) = B - \frac{k}{6}\cos\frac{\pi}{3}$

$= B - \frac{k}{12}$

$= 18$ ...... ㉠

$t=40$일 때, $T=20$이므로

$B - \frac{k}{6}\cos\left(\frac{\pi}{60}\cdot 40\right)$

$= B - \frac{k}{6}\cos\frac{2}{3}\pi = B + \frac{k}{12}$

$\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
$= -\cos\frac{\pi}{3}$
$= -\frac{1}{2}$

$= 20$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\left(B + \frac{k}{12}\right) - \left(B - \frac{k}{12}\right) = 2$

$\frac{k}{6} = 2$ $\therefore k = 12$

145 답 ⑤

점 P의 좌표를 $(\cos 2t,\ \sin 2t)$로 놓으면 점 Q의 좌표는

$(\cos t,\ \sin t)$

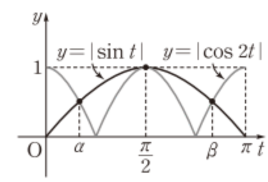
점 P에서 y축까지의 거리와 점 Q에서 x축까지의 거리가 같으므로

$|\cos 2t| = |\sin t|$

$0 \leq t \leq \pi$에서 두 함수

$y = |\cos 2t|$, $y = |\sin t|$

의 그래프는 각각 직선 $t = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고



$t = \frac{\pi}{2}$에서 $|\cos 2t| = |\sin t|$이므로 방정식

$|\cos 2t| = |\sin t|$는 3개의 서로 다른 실근이 존재한다.

$\frac{\pi}{2}$가 아닌 다른 두 근을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha + \beta = \pi$

따라서 구하는 모든 t의 값의 합은

$\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$

146 답 ⑤

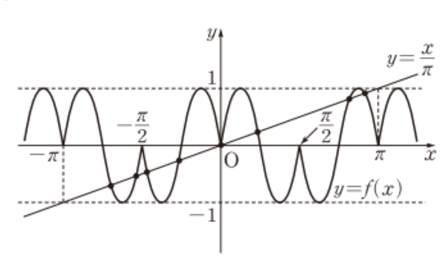
조건 (나)에서 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$일 때,

$f(x) = \sin 4x$

조건 (다)에서 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$일 때,

$f(x) = -\sin 4x$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi) = f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$는 다음 그림과 같다.



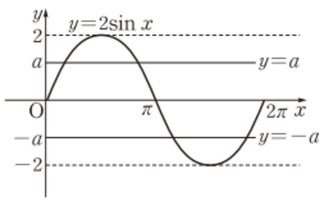
직선 $y = \frac{x}{\pi}$가 두 점 $(\pi,\ 1)$, $(-\pi,\ -1)$을 지나므로 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다.

Ⓐ **147** 답 ⑤

$\sin x = -\sin x + a$에서

$2\sin x = a$

즉 $N(a)$는 $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수와 같다.



ㄱ. $a=0$이면 $2\sin x=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

$\therefore N(0)=3$

ㄴ. $|a|>2$, 즉 $a<-2$ 또는 $a>2$이면 함수 $y=2\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$는 만나지 않는다.

$\therefore N(a)=0$

$-1 \le \sin x \le 1$이므로
$-2 \le 2\sin x \le 2$

ㄷ. $N(a)=2$이면 $-2<a<0$ 또는 $0<a<2$이므로

$0<-a<2$ 또는 $-2<-a<0$

$\therefore N(-a)=2$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓐ **148** 답 ③

주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1 < 4\sin x - 3 \le 1$

$2 < 4\sin x \le 4$

$\therefore \frac{1}{2} < \sin x \le 1$

$0 \le x < 2\pi$이므로

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$이므로

$\beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$

등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면
① $a_n = r^n$일 때
$-1 < r \le 1$
② $a_n = ar^{n-1}$일 때
$a=0$ 또는
$-1 < r \le 1$

Ⓐ **149** 답 ②

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에서

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos\theta \ge \frac{1}{2}$에서 $\cos^2\theta \ge \frac{1}{4}$이므로

$-\cos^2\theta \le -\frac{1}{4}$

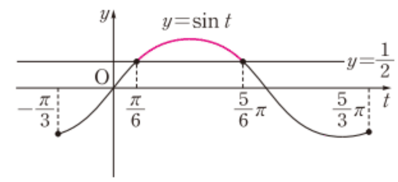
$\therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \le 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

따라서 $\sin^2\theta$의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

Ⓐ **150** 답 1

$x - \frac{\pi}{3} = t$로 놓으면 $0 \le x \le 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5}{3}\pi$이고

주어진 부등식은 $\sin t \ge \frac{1}{2}$



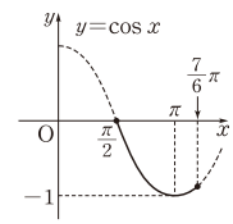
위의 그림에서 $\sin t \ge \frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{5}{6}\pi$

즉 $\frac{\pi}{6} \le x - \frac{\pi}{3} \le \frac{5}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{7}{6}\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{7}{6}\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$M=0$, $m=-1$

$\therefore M-m=1$

05 삼각함수의 미분

Ⓐ 151 답 ①

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로

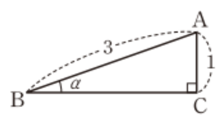
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

다른풀이 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이고

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서



$$\overline{BC}=\sqrt{3^2-1^2}$$
$$=2\sqrt{2}$$
$$\therefore \cos\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ⓐ 152 답 ③

$$\tan10^\circ+\frac{1}{\tan20^\circ}=\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}+\frac{\cos20^\circ}{\sin20^\circ}$$
$$=\frac{\sin20^\circ\sin10^\circ+\cos20^\circ\cos10^\circ}{\cos10^\circ\sin20^\circ}$$
$$=\frac{\cos(20^\circ-10^\circ)}{\cos10^\circ\sin20^\circ}$$
$$=\frac{\cos10^\circ}{\cos10^\circ\sin20^\circ}$$
$$=\frac{1}{\sin20^\circ}$$

$\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$
$=\cos(\alpha-\beta)$

Ⓐ 153 답 ①

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$에서

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{7}$$

이때 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$이므로

$$\frac{4}{7}-\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{7}$$
$$\therefore \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{7}$$

Ⓐ 154 답 ⑤

이차방정식 $x^2+\frac{a}{3}x+\frac{b}{36}=0$의 두 근이 $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=-\frac{a}{3}$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{b}{36}$$

이때

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

이므로 $\quad -\frac{a}{3}=\frac{2}{3} \qquad \therefore a=-2$

또

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}-\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{11}{36}$$

이므로 $\quad \frac{b}{36}=-\frac{11}{36} \qquad \therefore b=-11$

$$\therefore ab=(-2)\cdot(-11)=22$$

Ⓐ 155 답 ⑤

$\overline{CD}=a\,(a>0)$라 하면 직각삼각형 CED에서

$$\overline{DE}=\sqrt{5-a^2}$$

이때 $\overline{AD}=4\overline{DE}$이므로 $\quad \overline{AD}=4\sqrt{5-a^2}$

직각삼각형 CAD에서 피타고라스 정리를 이용하면

$$(2\sqrt{5})^2=a^2+(4\sqrt{5-a^2})^2$$
$$a^2=4 \qquad \therefore a=2\,(\because a>0)$$

$20=a^2+80-16a^2$
$15a^2=60,\quad a^2=4$

따라서 $\overline{DE}=1$, $\overline{AD}=4$이므로 직각삼각형 ABD에서

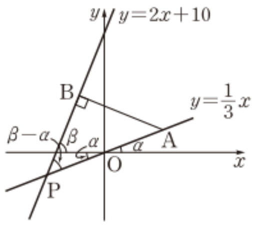
$$\overline{BD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$
$$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}$$

삼각형 CED에서

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ⓐ **156** 답 ①

오른쪽 그림에서



$\tan(\beta-\alpha)$

$=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=1$

$\therefore\ \beta-\alpha=45°$

따라서 삼각형 PAB는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BA}=\overline{PB}=12$

$\overline{PA}=12\sqrt{2}$

Ⓐ **157** 답 ①

$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$

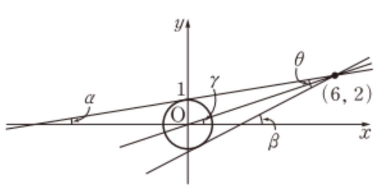
따라서 $\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$이므로

$\tan\alpha+1=2(1-\tan\alpha),\qquad 3\tan\alpha=1$

$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

Ⓐ **158** 답 ②

다음 그림과 같이 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ, 점 $(6,\ 2)$와 원점을 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 γ라 하자.



$\alpha<\beta$일 때,

$\dfrac{\theta}{2}+\alpha=\gamma,\ \dfrac{\theta}{2}+\gamma=\beta$

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

이므로

$\alpha+\beta=2\gamma$

또 $\tan\gamma=\dfrac{1}{3}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\tan 2\gamma$

$\tan 2\gamma=\tan(\gamma+\gamma)$
$=\dfrac{\tan\gamma+\tan\gamma}{1-\tan\gamma\tan\gamma}$
$=\dfrac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$

$=\dfrac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$

$=\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$

Ⓐ **159** 답 ④

$\tan\theta_1=\dfrac{1}{2}$이므로 직선 AP의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다. 이때 직선 AP의 y절편은 1이므로 그 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}x+1$

곡선 $y=1-x^2$과 직선 AP의 교점의 x좌표는

$1-x^2=-\dfrac{1}{2}x+1$에서 $\qquad x^2-\dfrac{1}{2}x=0$

$x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0\qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{2}\,(\because\ 0<x<1)$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

즉 직각삼각형 PHO에서 $\overline{PH}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{OH}=\dfrac{3}{4}$이므로

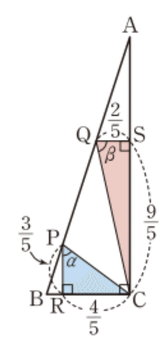
$\tan\theta_2=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}$

$=\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=8$

Ⓐ **160** 답 61



오른쪽 그림에서 $\overline{PR}\,/\!/\,\overline{AC}$이고 점 P는 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점이므로

△PBR∽△ABC이고 닮음비는
$\overline{PB}:\overline{AB}=1:5$

$\overline{PR}=\dfrac{1}{5}\overline{AC}=\dfrac{3}{5}$,

$\overline{RC}=\dfrac{4}{5}\overline{BC}=\dfrac{4}{5}$

삼각형 PRC가 직각삼각형이므로

$\tan\alpha=\dfrac{\overline{RC}}{\overline{PR}}=\dfrac{4}{3}$

△AQS∽△ABC이고 닮음비는
$\overline{AQ}:\overline{AB}=2:5$

$\overline{QS}\,/\!/\,\overline{BC}$이고 점 Q가 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overline{QS}=\dfrac{2}{5}\overline{BC}=\dfrac{2}{5}$, $\overline{SC}=\dfrac{3}{5}\overline{AC}=\dfrac{9}{5}$

삼각형 QCS가 직각삼각형이므로

$\tan\beta=\dfrac{\overline{SC}}{\overline{QS}}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ \tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{3}}=\dfrac{19}{42}$

따라서 $p=42$, $q=19$이므로 $\qquad p+q=61$

다큐 Board

Ⓐ **161** 답 ②

$\sin\theta=\frac{1}{3}$이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Ⓐ **162** 답 ③

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1$$
$$=\frac{2}{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}-1$$
$$=\frac{2}{\frac{6}{5}}-1=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$에서 $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$

Ⓐ **163** 답 ④

$\sin 2x=\frac{1}{3}$이므로

$$\cos 2x=\sqrt{1-\sin^2 2x}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because\ 0<2x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$0<x<\frac{\pi}{4}$이므로 $0<2x<\frac{\pi}{2}$

Ⓐ **164** 답 35

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로

$3\cos 2x+17\cos x=0$에서

$$3(2\cos^2 x-1)+17\cos x=0$$
$$6\cos^2 x+17\cos x-3=0$$
$$(6\cos x-1)(\cos x+3)=0$$
$$\therefore\ \cos x=\frac{1}{6}\ (\because\ -1\le\cos x\le 1)$$
$$\therefore\ \tan^2 x=\sec^2 x-1=36-1=35$$

$\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}=6^2=36$

Ⓐ **165** 답 ①

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$이므로

$$\sec^2\theta=1+(2\sqrt{2})^2$$
$$=9$$
$$\therefore\ \sec\theta=3\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

Ⓐ **166** 답 ④

$\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로 $\sin x=\sin 2x$에서

$$\sin x=2\sin x\cos x$$
$$\sin x(1-2\cos x)=0$$
$$\therefore\ \sin x=0\ \text{또는}\ \cos x=\frac{1}{2}$$

$0\le x\le\pi$이므로 $\sin x=0$에서

$$x=0\ \text{또는}\ x=\pi$$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $\quad x=\frac{\pi}{3}$

따라서 방정식의 모든 해의 합은

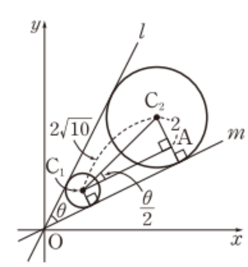
$$0+\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$$

Ⓐ **167** 답 12

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{5}{12}$에서 $\tan\alpha=p$이므로

$$\frac{2p}{1-p^2}=\frac{5}{12},\qquad 24p=5-5p^2$$
$$5p^2+24p-5=0$$
$$(5p-1)(p+5)=0$$
$$\therefore\ p=\tan\alpha=\frac{1}{5}\ \left(\because\ 0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\therefore\ 60p=12$$

Ⓐ **168** 답 90



오른쪽 그림에서

$$\overline{AC_2}=2,$$
$$\overline{C_1C_2}=2\sqrt{10}$$

이므로

$$\overline{AC_1}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}$$
$$=6$$

$\angle C_2C_1A=\frac{\theta}{2}$이므로

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\therefore\ \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$
$$\therefore\ 120\tan\theta=90$$

다큐 Board

Ⓐ **169** 답 ⑤

(원주각의 크기)$=\frac{1}{2}\times$(중심각의 크기)이므로

$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin\frac{\theta}{2}$

$=6\sin\frac{\theta}{2}$

> 삼각형 ABC에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 θ의 크기를 알 때
> (삼각형 ABC의 넓이)
> $=\frac{1}{2}ac\sin\theta$

즉 $6\sin\frac{\theta}{2}=2$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\because 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$

> $0<\theta<\pi$이므로
> $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

Ⓐ **170** 답 ④

$\angle AOP=\alpha+\beta$이므로

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

> $\cos(\alpha+\beta)$
> $=\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$
> $=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
> $=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(\because 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

즉 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}-2\beta$

> $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$에서
> $\alpha=\frac{\pi}{6}-\beta$이므로
> $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}-\beta-\beta$
> $=\frac{\pi}{6}-2\beta$

이때 $\angle AOQ=\beta$이므로

$\sin\beta=\frac{(\text{점 Q의 }y\text{좌표})}{\overline{OQ}}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{14}}{4}\ \left(\because 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

또

$\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta$

$=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$

$=2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2-1=\frac{3}{4}$

이므로

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\beta\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\beta-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\beta$

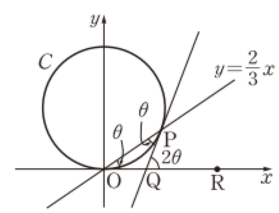
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$

$=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$

Ⓐ **171** 답 ⑤

원 C 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 다음 그림과 같이 x축 위에 점 R를 잡자.

(단, 점 R의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)



> 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

점 Q에서 원 C에 그은 두 접선 OQ, PQ에 대하여

$\overline{OQ}=\overline{PQ}$이므로 $\angle POQ=\theta$라 하면

$\angle QPO=\angle POQ=\theta$이므로

$\angle PQR=2\theta$

이때 $\tan\theta=\frac{2}{3}$이므로 원 C 위의 점 P에서의 접선 PQ의 기울기는

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$=\frac{12}{5}$

Ⓐ **172** 답 ③

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}$

$=1\cdot 1\cdot 1=1$

보충학습

> **지수함수의 극한**
> ① $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$　　② $\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{x}=k$ (단, $k\neq 0$)

다큐 Board

함수 $f(x)$가
(i) $x=a$에서 정의되고
(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며
(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

Ⓐ **173** 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{3x+\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{x}+\frac{\tan x}{x}\right)$$
$$=3+1=4$$

Ⓐ **174** 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}$$
$$=\frac{5}{3}$$

Ⓐ **175** 답 2

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos x}$$
$$=1\cdot2$$
$$=2$$

Ⓐ **176** 답 8

$$\lim_{x\to0}x^2f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot4\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$
$$=1\cdot1\cdot4\cdot2=8$$

다른풀이 $f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=g(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}g(x)=1$$
$$\therefore \lim_{x\to0}x^2f(x)$$
$$=\lim_{x\to0}x^2\cdot\frac{g(x)}{1-\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to0}x^2\cdot\frac{g(x)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{1-\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot4\cdot g(x)\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)$$
$$=1\cdot4\cdot1\cdot2$$
$$=8$$

보충학습

$1-\cos kx$ 꼴을 포함한 삼각함수의 극한값을 구할 때는 분자, 분모에 각각 $1+\cos kx$를 곱하여 $1-\cos^2 kx=\sin^2 kx$임을 이용한다.

Ⓐ **177** 답 ②

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$$
$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin 2x-a}{3x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to0}(e^x-\sin 2x-a)=0$이므로

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin 2x-1}{3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{3x}-\frac{\sin 2x}{3x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{3}-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right)$$
$$=1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

즉 $b=-\frac{1}{3}$이므로

$$a+b=\frac{2}{3}$$

보충학습

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ (k는 실수)일 때
(1) $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\quad\lim_{x\to a}f(x)=0$
(2) $k\neq0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\quad\lim_{x\to a}g(x)=0$

Ⓐ **178** 답 ⑤

ㄱ. 주어진 그래프에서 $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이고 $-x=t$로 놓으면 $\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=0$이므로

$$\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}f(-x)=0$$

ㄴ. $-1\le\sin\frac{1}{x}\le1$ $(x\neq0)$이고 $f(x)\ge0$이므로 각 변에 $f(x)$를 곱하면

$$-f(x)\le f(x)\sin\frac{1}{x}\le f(x)$$

한편 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\{-f(x)\}=0$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x)\sin\frac{1}{x}=0$$

ㄷ. 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 연속이고 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서만 불연속이므로 함수 $(g\circ f)(x)$가 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여
$f(x)\le h(x)\le g(x)$이고
$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=a$
이면 $\lim_{x\to a}h(x)=a$

(i) $x=-1$에서

$g(f(-1))=g(0)=0$,

$\lim_{x\to-1+} g(f(x))=\sin\pi=0$,

$\lim_{x\to-1-} g(f(x))=\sin 0=0$

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $x=1$에서

$g(f(1))=g(0)=0$,

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\sin 0=0$,

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\sin\pi=0$

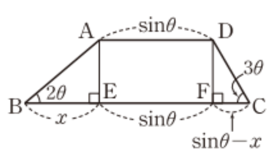
따라서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓐ 179　답 14

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{BE}=x$라 하면　$\overline{AE}=x\tan 2\theta$

$\overline{CF}=\sin\theta-x$이므로　$\overline{DF}=(\sin\theta-x)\tan 3\theta$

$\overline{AE}=\overline{DF}$에서　$x\tan 2\theta=(\sin\theta-x)\tan 3\theta$

$$\therefore x=\frac{\sin\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$$

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta)\cdot x\tan 2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}\cdot\tan 2\theta$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta\tan 2\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta\tan 2\theta\tan 3\theta}{\theta^3(\tan 2\theta+\tan 3\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\cdot 2\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\cdot 3\cdot\frac{\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}9\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\tan 2\theta}{2\theta}\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\tan 2\theta}{2\theta}+3\cdot\frac{\tan 3\theta}{3\theta}}$$
$$=9\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{5}$$
$$=\frac{9}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=9$이므로

$p+q=14$

Ⓐ 180　답 ①

$\overline{OH}=\cos\theta$, $\overline{OA}=1$이므로

$\overline{AH}=1-\cos\theta$

$\angle OAB=\frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 AQH에서

△OAB에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 △OAB는 직각이등변삼각형이다.

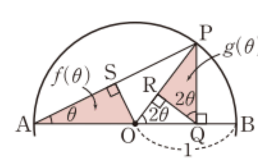
$\overline{QH}=\overline{AH}=1-\cos\theta$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4\theta}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\cdot\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2\cdot2^2}$$
$$=\frac{1}{8}$$

Ⓐ 181　답 65

오른쪽 그림과 같이 삼각형 AOS에서 $\overline{OA}=1$, $\angle OAS=\theta$이므로



$\overline{AS}=\cos\theta$,

$\overline{OS}=\sin\theta$

$$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{OS}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 OPQ에서 $\overline{OP}=1$, $\angle POQ=2\theta$이므로

$\angle POQ=2\angle PAO$

$\overline{PQ}=\sin 2\theta$

또 $\angle PQR=2\theta$이므로 삼각형 PQR에서

$\angle RQO+\angle RQO=\frac{\pi}{2}$,
$\angle RQO+\angle PQR=\frac{\pi}{2}$
이므로
$\angle PQR=\angle ROQ=2\theta$

$\overline{PR}=\overline{PQ}\sin 2\theta$

$=\sin^2 2\theta$

$\overline{QR}=\overline{PQ}\cos 2\theta$

$=\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta$

$$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{PR}\cdot\overline{QR}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sin^3 2\theta\cdot\cos 2\theta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2 f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\cdot\theta^2\cdot\sin 2\theta}{\frac{1}{2}\cdot\sin^3 2\theta\cdot\cos 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{\sin^2 2\theta}\cdot\frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\theta)^2}{\sin^2 2\theta}\cdot\frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot1\cdot1=\frac{1}{8}$$

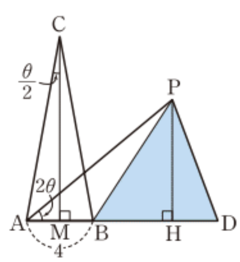
따라서 $p=8$, $q=1$이므로

$p^2+q^2=64+1=65$

Ⓐ 182 답 16

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{AM}=\overline{MB}=2$



이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선은 밑변을 이등분한다.

또 $\angle ACM=\frac{\theta}{2}$이므로

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{\overline{AC}}$$

$$\therefore \overline{AC}=\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

점 P에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{AP}\sin 2\theta$

$=\overline{AC}\sin 2\theta$ ($\because$ $\overline{AP}=\overline{AC}$)

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{PH}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{AC}\sin 2\theta$$

$\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$
$=\overline{AC}-\overline{AB}$
($\because$ $\overline{AD}=\overline{AC}$)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}-4\right)\cdot\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-4\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\left(1-2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}(\theta\times S(\theta))$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\left(1-2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}2\cdot\frac{\frac{\theta^2}{4}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot4\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\cdot2\cdot\left(1-2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$=2\cdot1\cdot4\cdot1\cdot2\cdot1=16$

Ⓐ 183 답 30

$\overline{OP}=1$이고 $\angle POB=\theta$이므로

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 P와 Q의 y좌표가 같으므로 점 Q의 x좌표는

$\ln(x+1)=\sin\theta$에서

$x+1=e^{\sin\theta}$

$x=e^{\sin\theta}-1$

$\therefore$ $Q(e^{\sin\theta}-1,\ \sin\theta)$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{QP}\cdot\overline{HO}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\sin\theta$$

$L(\theta)=\overline{HQ}=e^{\sin\theta}-1$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}\cdot(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)$$

$\sin\theta=t$로 놓으면 $\theta\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{t}{e^t-1}$$

$=1$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1$$

$$=\frac{1}{2}$$

즉 $k=\frac{1}{2}$이므로

$$60k=60\cdot\frac{1}{2}=30$$

Ⓐ 184 답 20

$\overline{OD}=a(a>0)$로 놓으면 삼각형 GOD에서

$$\tan\frac{\theta}{3}=\frac{\overline{GD}}{a}$$

$$\therefore \overline{GD}=a\tan\frac{\theta}{3}$$

$$\therefore f(\theta)=\overline{GD}^2$$

$$=\left(a\tan\frac{\theta}{3}\right)^2$$

$$=a^2\tan^2\frac{\theta}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 ODP에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{OP}}{a}$$

$\therefore$ $\overline{OP}=a\cos\theta$

삼각형 OQP에서

$$\tan\frac{2\theta}{3}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{OP}\tan\frac{2\theta}{3}$$

$$=a\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$$

$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{PQ}$

$=\frac{1}{2}\cdot a\cos\theta\cdot a\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}$

$=\frac{a^2}{2}\cdot\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{a^2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$ $(\because a^2>0)$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\cdot\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{9\cdot\frac{\theta^2}{9}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{2\theta}{3}}{\tan\frac{2\theta}{3}}$

$=\frac{2}{9}\cdot1\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{3}$

따라서 $k=\frac{1}{3}$이므로

$60k=60\cdot\frac{1}{3}=20$

Ⓐ 185 답 ④

$\angle EBC=\theta$이므로

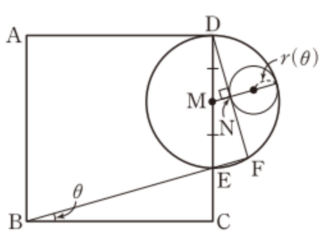
$\angle BEC=\angle DEF=\frac{\pi}{2}-\theta$

삼각형 DEF에서 $\angle DFE=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle EDF=\theta$

한편 $\overline{EC}=\tan\theta$이므로 $\overline{DE}=1-\tan\theta$

오른쪽 그림과 같이 선분 DE의 중점을 M이라 하면



$\overline{DM}=\frac{1-\tan\theta}{2}$

직선 DF와 작은 원의 접점을 N이라 하면 삼각형 DMN에서

$\overline{MN}=\overline{DM}\sin\theta=\frac{1-\tan\theta}{2}\cdot\sin\theta$

$\therefore r(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{DM}-\overline{MN})$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\tan\theta}{2}-\frac{1-\tan\theta}{2}\cdot\sin\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\tan\theta}{2}\cdot(1-\sin\theta)$

$=\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4}$

반원에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

$\angle EDF$
$=\pi-(\angle DEF+\angle DFE)$
$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
$=\theta$

$\overline{MN}+2r(\theta)=\overline{DM}$

$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{4\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{4}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$\frac{\pi}{4}-\theta=t$로 놓으면 $\theta\longrightarrow\frac{\pi}{4}-$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{2\tan t}{t(1+\tan t)}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{t}\cdot\frac{2}{1+\tan t}$

$=1\cdot2=2$

$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot2=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$

Ⓐ 186 답 ③

$f'(x)=\cos x-4$이므로

$f'(0)=1-4=-3$

Ⓐ 187 답 26

$f'(x)=-2\sin x+3$이고 $-1\le\sin x\le1$이므로

$M=2+3=5,\ m=-2+3=1$

$\therefore M^2+m^2=5^2+1^2=26$

Ⓐ 188 답 27

$f'(x)=4\cos x$이므로

$g'(x)=3f(x)+3xf'(x)$

$=3(4\sin x+5)+3x\cdot4\cos x$

$=12\sin x+15+12x\cos x$

$\therefore g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=12+15$

$=27$

$\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0$

다큐 Board

Ⓐ **189** 답 ⑤

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2\sin2h}{1-\cos h}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h}{1-\cos h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h\sin2h(1+\cos h)}{(1-\cos h)(1+\cos h)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h\sin h\cos h(1+\cos h)}{1-\cos^2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h\sin h\cos h(1+\cos h)}{\sin^2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h\cos h(1+\cos h)}{\sin h}$$
$$=\lim_{h\to0}2\cdot\frac{h}{\sin h}\cdot\cos h(1+\cos h)$$
$$=\lim_{h\to0}2\cdot\frac{1}{\frac{\sin h}{h}}\cdot\cos h(1+\cos h)$$
$$=2\cdot1\cdot1\cdot2=4$$

보충학습

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ⅲ. 미분법

06 여러 가지 미분법

Ⓐ **190** 답 12

함수 $g(x)(g(x)\neq0)$가 미분가능할 때 $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$f'(x)=8-\left(-\frac{4}{x^2}\right)=8+\frac{4}{x^2}$이므로

$f'(1)=8+4=12$

다른풀이 $f'(x)=\left(8x-\frac{4}{x}\right)'$

$=(8x-4x^{-1})'$

$=8-4\cdot(-1)x^{-1-1}$

$=8+4x^{-2}$

$=8+\frac{4}{x^2}$

Ⓐ **191** 답 ⑤

$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2ax^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+a}{(x^2+1)^2}$

이므로 $f'(2)=6$에서

$\frac{-4a+a}{25}=6,\qquad -3a=150$

$\therefore a=-50$

Ⓐ **192** 답 ①

$f'(x)=\frac{4\ln x-4x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{4\ln x-4}{(\ln x)^2}$이므로

$f'(e^2)=\frac{4\ln e^2-4}{(\ln e^2)^2}$

$\ln e^2=2\ln e=2\cdot1=2$

$=\frac{8-4}{2^2}=1$

Ⓐ **193** 답 ②

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$이므로

$f(2)=3$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f'(2)=5$

이때 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}$에서

$g'(x)=\frac{f'(x)e^{x-2}-f(x)e^{x-2}}{(e^{x-2})^2}$

이므로

$g'(2)=f'(2)-f(2)=5-3=2$

보충학습

분수 꼴의 극한의 성질

$\lim_{x \to a} \frac{(\text{분자})}{(\text{분모})} = \alpha$ (α는 실수)에서

① $x \longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이면 (분자) $\longrightarrow 0$

② $x \longrightarrow a$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$, $\alpha \neq 0$이면 (분모) $\longrightarrow 0$

Ⓐ 194 답 ③

$f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec^2 \frac{\pi}{3} - \csc^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$(\tan x)' = \sec^2 x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$

Ⓐ 195 답 ⑤

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(2h)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(3h) - f(0)\} - \{f(2h) - f(0)\}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(0)}{3h} \cdot 3 - \lim_{h \to 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \cdot 2$$
$$= 3f'(0) - 2f'(0) = f'(0)$$

이때 $f(x) = \tan x \sec x$에서

$$f'(x) = \sec^2 x \sec x + \tan x \sec x \tan x = \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x)$$

이므로

$$f'(0) = 1$$

Ⓐ 196 답 9

$f'(x) = \begin{cases} ae^x & (x > 0) \\ \sec^2 x & (x < 0) \end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \to 0-} \sec^2 x = \lim_{x \to 0+} ae^x$$

$\therefore a = 1$

또 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이므로

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

$$\lim_{x \to 0-} \tan x = \lim_{x \to 0+} (ae^x + b) = f(0)$$

$a + b = 0 \quad \therefore b = -1$

즉 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & (x \geq 0) \\ \tan x & (x < 0) \end{cases}$이므로

$$f(\ln 10) = e^{\ln 10} - 1 = 10 - 1 = 9$$

Ⓐ 197 답 28

$f'(x) = 4 \cdot 7 \cos 7x = 28 \cos 7x$이므로

$$f'(2\pi) = 28 \cos 14\pi = 28 \cdot 1 = 28$$

Ⓐ 198 답 15

$\{e^{f(x)}\}' = e^{f(x)} f'(x)$

$f'(x) = 5e^{3x-3} \cdot 3 = 15e^{3x-3}$이므로

$$f'(1) = 15e^0 = 15$$

Ⓐ 199 답 12

$f(x^3) = 2x^3 - x^2 + 32x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x^3) \cdot 3x^2 = 6x^2 - 2x + 32$$

따라서 $f'(x^3) = \frac{6x^2 - 2x + 32}{3x^2}$이므로

$$f'(1) = 12$$

Ⓐ 200 답 ④

$h(x) = g(f(x))$로 놓으면

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$이고

$f'(x) = 2 \sin x \cos x$,

$g'(x) = e^x$

이므로 구하는 극한값은

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{e}$$

Ⓐ 201 답 ①

$f(\cos x) = \sin 2x + \tan x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x \cdot f'(\cos x) = 2 \cos 2x + \sec^2 x \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$인 x에 대하여 $\cos x = \frac{1}{2}$이면 $x = \frac{\pi}{3}$이므로 ㉠에 $x = \frac{\pi}{3}$를 대입하면

$$-\sin \frac{\pi}{3} \cdot f'\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{2}{3}\pi + \sec^2 \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2^2 = 3$$

$\cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 = -2\sqrt{3}$$

Ⓐ **202** 답 ④

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로

$$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$$

$$\therefore h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}$$

한편 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는 $x^3+2x^2-15x+5=5$에서

$$x(x^2+2x-15)=0,\quad x(x+5)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore f(5)=3,\ g(5)=-5$$

이때 $F(x)=x^3+2x^2-15x+5$라 하면

$$F(f(t))=t$$

이고 위의 식의 양변을 미분하면

$$\{F(f(t))\}'=F'(f(t))f'(t)=1$$

이므로

$$f'(t)=\frac{1}{F'(f(t))}$$

$$\therefore f'(5)=\frac{1}{F'(f(5))}=\frac{1}{F'(3)}=\frac{1}{24}$$

마찬가지로 $F(g(t))=t$에서

$$g'(5)=\frac{1}{F'(g(5))}=\frac{1}{F'(-5)}=\frac{1}{40}$$

$$\therefore h'(5)=\{3-(-5)\}+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$$

Ⓐ **203** 답 ①

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로

$$\angle ABO=\angle AOB=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\therefore \angle OAB=\pi-(\angle ABO+\angle AOB)=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta$$

주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$라 하면

$$g(\theta)=(\text{부채꼴 AOB의 넓이})-(\text{삼각형 AOB의 넓이})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta$$

$$=\theta-\boxed{\frac{1}{2}\sin2\theta} \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $y=tx$에서 $t=\tan\theta$이고 $g(\theta)=f(t)$이므로

$$g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$g'(\theta)=f'(\tan\theta)\times(\tan\theta)'$$

$$=f'(t)\times\boxed{\sec^2\theta} \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 ㉠에서

$$g'(\theta)=1-\frac{1}{2}\cos2\theta\cdot(2\theta)'=1-\cos2\theta$$

이므로 ㉡에서

$$f'(t)=\frac{g'(\theta)}{\sec^2\theta}=\frac{1-\cos2\theta}{\sec^2\theta}=\frac{1-(2\cos^2\theta-1)}{\sec^2\theta}=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\sec^2\theta}$$

$t=2$일 때, $\tan\theta=2$이므로

$$\sec^2\theta=1+2^2=5$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$$\therefore f'(2)=\frac{2\left(1-\frac{1}{5}\right)}{5}=\boxed{\frac{8}{25}}$$

$h_1(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta$, $h_2(\theta)=\sec^2\theta$, $a=\frac{8}{25}$이므로

$$a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{8}{25}\times\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\times\sec^2\frac{\pi}{4}=\frac{8}{25}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{8}{25}$$

Ⓐ **204** 답 21

$f'(x)=\frac{(2x-1)'}{2x-1}=\frac{2}{2x-1}$이므로

$$f'(10)=\frac{2}{19}$$

$$\therefore p+q=19+2=21$$

Ⓐ **205** 답 ⑤

A$(1,\ 0)$, B$(t,\ 2\sqrt{t})$, C$(t,\ 0)$이므로

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot(t-1)\cdot2\sqrt{t}=t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$$

$f'(t)=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(9)=\frac{3}{2}\cdot3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$$

Ⓐ **206** 답 ①

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(2)=2$$

다큐 Board

$F(x)=x^3+2x^2-15x+5$에서
$F'(x)=3x^2+4x-15$
이므로
$F'(3)=3\cdot3^2+4\cdot3-15=24$
$\therefore \frac{1}{F'(3)}=\frac{1}{24}$

$F'(-5)=3\cdot(-5)^2+4\cdot(-5)-15=40$
이므로
$\frac{1}{F'(-5)}=\frac{1}{40}$

$\{\ln|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

n이 실수일 때 $(x^n)'=nx^{n-1}$

이때 $\{f(\sqrt{x})\}'=f'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'=f'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 양변에 $x=4$를 대입하면

$$\{f(\sqrt{4})\}'=f'(\sqrt{4})\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}=f'(2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Ⓐ 207 답 ③

$g(x)=\ln f'(x)=\ln[1+\{f(x)\}^2]$에서

$$g'(x)=\frac{[1+\{f(x)\}^2]'}{1+\{f(x)\}^2}=\frac{2f(x)f'(x)}{1+\{f(x)\}^2}=\frac{2f(x)[1+\{f(x)\}^2]}{1+\{f(x)\}^2}=2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot1=2$$

$y=\{f(x)\}^n$ (n은 정수)
➔ $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

Ⓐ 208 답 10

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이고 $f(0)=1$이므로

$$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)=15$$

이때 $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(0)=\frac{3}{2}$$

따라서 $g'(1)\cdot\frac{3}{2}=15$이므로

$$g'(1)=15\cdot\frac{2}{3}=10$$

Ⓐ 209 답 ③

$g(2)=\theta$라 하면 $f(\theta)=2$이므로

$$2\sin\theta+1=2,\qquad \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

이때 $f'(x)=2\cos x$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

보충학습

역함수의 미분법 유도

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능하다고 하자.
두 함수는 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\qquad f(g(x))=x$
양변을 x에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)=1$$

$$\therefore g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}\ (\text{단, } f'(g(x))\neq0)$$

Ⓐ 210 답 ③

$f(1)=2,\ f'(1)=3$이므로

$$g(2)=1$$

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

이때 $h(x)=xg(x)$에서 $h'(x)=g(x)+xg'(x)$이므로

$$h'(2)=g(2)+2g'(2)=1+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

Ⓐ 211 답 ①

$g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$$\ln(e^b-1)=a\qquad \therefore e^b-1=e^a$$

이때 $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$이므로

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}=\frac{e^b-1}{e^b}=\frac{e^a}{e^a+1}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=2$$

다른풀이 $f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수는

$$g(x)=\ln(e^x+1)$$

$y=\ln(e^x-1)$에서
$e^y=e^x-1$
$e^x=e^y+1$
$\therefore x=\ln(e^y+1)$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\ln(e^x+1)$

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1},\ g'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$이므로

$$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=2$$

Ⓐ 212 답 4

점 $(4\pi,\ 2\pi)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$$g(4\pi)=2\pi$$

이때 $f'(x)=2+\cos x$이므로

$$g'(4\pi)=\frac{1}{f'(2\pi)}=\frac{1}{2+\cos2\pi}=\frac{1}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=1$이므로 $\qquad p+q=4$

Ⓐ 213 답 16

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=0$에서 $\qquad g(0)=\frac{\pi}{4}$

이때 $f'(x)=\frac{\sec^2x}{\tan x}$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-4g(0)}{h}=32\lim_{h\to0}\frac{g(8h)-g(0)}{8h}=32g'(0)=32\cdot\frac{1}{2}=16$$

다큐 Board

Ⓐ **214** 답 15

주어진 조건에서 $f(2)=1$, $f'(2)=1$

$f(2x)=h(x)$로 놓으면 $h(1)=f(2)=1$이므로

$$g(1)=h^{-1}(1)=1 \qquad \therefore a=1$$

이때 $h'(x)=2f'(2x)$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{h'(g(1))}=\frac{1}{h'(1)}=\frac{1}{2f'(2)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore 10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$$

다른풀이 주어진 조건에서 $f(2)=1$, $f'(2)=1$

함수 $f(x)$의 역함수를 $p(x)$라 하면

$$p(1)=2,\ p'(1)=\frac{1}{f'(p(1))}=\frac{1}{f'(2)}=1$$

한편 $y=f(2x)$에서 $2x=f^{-1}(y)$, 즉 $x=\frac{1}{2}f^{-1}(y)$이므로 함수 $y=f(2x)$의 역함수는

$$g(x)=\frac{1}{2}f^{-1}(x)=\frac{1}{2}p(x)$$

$$\therefore g'(x)=\frac{1}{2}p'(x)$$

따라서

$$a=g(1)=\frac{1}{2}p(1)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

$$b=g'(1)=\frac{1}{2}p'(1)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

이므로 $10(a+b)=10\left(1+\frac{1}{2}\right)=15$

점 (2, 1)은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$f(2)=1$
또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 1이므로
$f'(2)=1$

Ⓐ **215** 답 3

$\frac{1}{n}=h$라 하면 $n \longrightarrow \infty$일 때 $h \longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(1+h)-g(1)\}-\{g(1-2h)-g(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+2\lim_{h\to 0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$$

$$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$$

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$$a^3+3a^2+4a+5=1, \qquad a^3+3a^2+4a+4=0$$

$$(a+2)(a^2+a+2)=0$$

$$\therefore a=-2\ (\because a^2+a+2>0)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ & & -2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

이때 $f'(x)=3x^2+6x+4$이므로

$$3g'(1)=\frac{3}{f'(g(1))}=\frac{3}{f'(-2)}=\frac{3}{4}$$

따라서 $p=\frac{3}{4}$이므로 $4p=3$

Ⓐ **216** 답 ①

조건 (나)에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-1\}=0$이므로 $f'(f(1))=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f''(f(1))f'(1)=f''(2)\cdot 3$$

따라서 $3f''(2)=3$이므로 $f''(2)=1$

Ⓐ **217** 답 ①

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+2h)-\sin x}{2h}\cdot 2$$

$$=2(\sin x)'=2\cos x$$

이므로 $f''(x)=-2\sin x$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{6}=-1$$

Ⓐ **218** 답 480

$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{3}{2}}$이므로

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}=\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$\therefore \lim_{a\to\frac{1}{4}}\frac{f'(a)-f'\left(\frac{1}{4}\right)}{a-\frac{1}{4}}=f''\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{15}{4}(2^{-2})^{-\frac{7}{2}}$$

$$=15\cdot 2^5$$

$$=480$$

07 도함수의 활용 (1)

Ⓐ 219 답 ②

$f(x)=e^x$으로 놓으면 $\quad f'(x)=e^x$

점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-1),\ \text{즉 } y=ex$$

직선 $y=ex$가 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접하므로

$ex=2\sqrt{x-k}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$$e^2x^2-4x+4k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4-4e^2k=0, \qquad 4e^2k=4$$

직선 $y=ex$가 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접하므로 이차방정식 $e^2x^2-4x+4k=0$은 중근을 갖는다.

$$\therefore\ k=\frac{1}{e^2}$$

Ⓐ 220 답 ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-2$이므로

$$f'(1)=3,\ f(1)=1$$

$F(x)=\dfrac{8}{1+x^2f(x)}$에서

$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$$F'(x)=-\frac{8\{2xf(x)+x^2f'(x)\}}{\{1+x^2f(x)\}^2}$$

$$\therefore\ F'(1)=-\frac{8\{2f(1)+f'(1)\}}{\{1+f(1)\}^2}$$

$$=-\frac{8(2+3)}{(1+1)^2}=-10$$

Ⓐ 221 답 8

$f(x)=e^{3-x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=-e^{3-x}$

점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-1$이므로

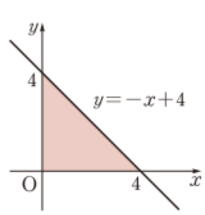
$f'(3)=-e^{3-3}=-1$

접선의 방정식은

$$y-1=-(x-3),\ \text{즉 } y=-x+4$$

직선 $y=-x+4$의 x절편과 y절편은 각각 4이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8$$



Ⓐ 222 답 50

$g(x)=f(x)\ln x^4$에서

$$g'(x)=f'(x)\ln x^4+f(x)\cdot\frac{4x^3}{x^4}$$

$$=f'(x)\ln x^4+\frac{4f(x)}{x}$$

점 $(e,\ -e)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(e)=-e$

$$\therefore\ g'(e)=4f'(e)+\frac{4\cdot(-e)}{e}$$

$$=4f'(e)-4$$

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직이면 $mm'=-1$

이때 $f'(e)g'(e)=-1$이므로

$$f'(e)\{4f'(e)-4\}=-1$$

$$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$$

$$\{2f'(e)-1\}^2=0 \qquad \therefore\ f'(e)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100f'(e)=100\cdot\frac{1}{2}=50$$

Ⓐ 223 답 ④

$f(x)=3^x$으로 놓으면 $\quad f'(x)=3^x\ln3$

점 $\mathrm{P}(k,\ 3^k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(k)=3^k\ln3$이므로 접선의 방정식은

$$y-3^k=3^k\ln3\cdot(x-k),\ \text{즉}$$

$$y=3^k\ln3\cdot(x-k)+3^k$$

이 접선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$$0=3^k\ln3\cdot(x-k)+3^k$$

$$3^k\ln3\cdot x=3^k\ln3\cdot k-3^k$$

$$\therefore\ x=k-\frac{1}{\ln3} \qquad \therefore\ \mathrm{A}\left(k-\frac{1}{\ln3},\ 0\right)$$

$g(x)=a^{x-1}$으로 놓으면 $\quad g'(x)=a^{x-1}\ln a$

점 $\mathrm{P}(k,\ a^{k-1})$에서의 접선의 기울기는

$g'(k)=a^{k-1}\ln a$이므로 접선의 방정식은

$$y-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a\cdot(x-k),\ \text{즉}$$

$$y=a^{k-1}\ln a\cdot(x-k)+a^{k-1}$$

이 접선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$$0=a^{k-1}\ln a\cdot(x-k)+a^{k-1}$$

$$a^{k-1}\ln a\cdot x=a^{k-1}\ln a\cdot k-a^{k-1}$$

$$\therefore\ x=k-\frac{1}{\ln a} \qquad \therefore\ \mathrm{B}\left(k-\frac{1}{\ln a},\ 0\right)$$

점 $\mathrm{H}(k,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=2\overline{\mathrm{BH}}$이므로

$$\frac{1}{\ln3}=\frac{2}{\ln a}, \qquad \ln a=\ln9$$

$$\therefore\ a=9$$

Ⓐ 224 답 ⑤

$y=x\ln x+1$에서 $\quad y'=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t+1)$이라 하면 직선 $y=2x+1$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로

$$\ln t+1=2, \qquad \ln t=1 \qquad \therefore\ t=e$$

따라서 접점의 좌표는 $(e,\ e+1)$이고 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 점 $(e,\ e+1)$과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2e-(e+1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{e}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}e$$

다큐 Board

보충학습

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ⓐ 225 답 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)=\ln\frac{x}{k}$의 그래프의 접선 중 기울기가 1인 접선에서 직선 $y=x$까지의 거리의 두 배가 l_k이다.

$f(x)=\ln\frac{x}{k}$에서 $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$

기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $\left(a, \ln\frac{a}{k}\right)$라 하면

$\frac{1}{a}=1 \quad \therefore a=1$

접점 $\left(1, \ln\frac{1}{k}\right)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$까지의 거리는

$$\frac{\left|1-\ln\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}=\frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore l_k=2\cdot\frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}=(1+\ln k)\sqrt{2}$$

$l_k\ge3\sqrt{2}$에서 $\quad (1+\ln k)\sqrt{2}\ge3\sqrt{2}$

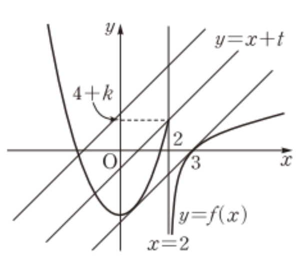
$1+\ln k\ge3, \quad \ln k\ge2$

$\ln k\ge\ln e^2 \quad \therefore k\ge e^2$

따라서 $l_k\ge3\sqrt{2}$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 8이다.

$e=2.7$이므로
$e^2=2.7^2=7.29$
따라서 $k\ge7.29$이므로 자연수 k의 최솟값은 8이다.

Ⓐ 226 답 ④



오른쪽 그림에서 직선 $y=x+t$가 점 $(2, 4+k)$를 지날 때 t의 값은

$4+k=2+t$

$\therefore t=k+2$

따라서 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개이려면

$$g(t)=\begin{cases}2 & (t\le k+2)\\ 1 & (t>k+2)\end{cases}$$

이어야 한다. 즉 직선 $y=x+t$가 두 곡선 $y=x^2+k\,(x\le2)$, $y=\ln(x-2)\,(x>2)$에 동시에 접해야 한다.

$y=\ln(x-2)$에서 $y'=\frac{1}{x-2}$이므로

접선의 기울기가 직선 $y=x+t$의 기울기와 같아야 한다.

$\frac{1}{x-2}=1 \qquad \therefore x=3$

따라서 곡선 $y=\ln(x-2)$와 직선 $y=x+t$의 접점의 좌표는 $(3, 0)$이므로 $\qquad t=-3$

$\ln(3-2)=\ln1=0$

곡선 $y=x^2+k$와 직선 $y=x-3$이 접해야 하므로

$x^2+k=x-3$에서 $\qquad x^2-x+k+3=0$

이차방정식 $x^2-x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(k+3)=0, \qquad -4k-11=0$

$\therefore k=-\frac{11}{4}$

Ⓐ 227 답 2

$f(x)=\sqrt{x-1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-1})$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)$, 즉

$y=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)+\sqrt{t-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-\frac{t}{2\sqrt{t-1}}+\sqrt{t-1}$

$2(t-1)=t, \qquad 2t-2=t$

$\therefore t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-2)+1$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$

이므로 $\qquad a=\frac{1}{2}, b=0$

$\therefore 4a-b=2$

Ⓐ 228 답 ⑤

$y=3e^{x-1}$에서 $\qquad y'=3e^{x-1}$

$\mathrm{A}(t, 3e^{t-1})$이라 하면 접선의 기울기는 $3e^{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$y-3e^{t-1}=3e^{t-1}(x-t)$, 즉

$y=3e^{t-1}x+3(1-t)e^{t-1}$

이 직선이 원점을 지나므로

$3(1-t)e^{t-1}=0$

$\therefore t=1 \ (\because e^{t-1}>0)$

따라서 $\mathrm{A}(1, 3)$이므로 선분 OA의 길이는

$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

Part Ⓐ Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ

Ⓐ **229** 답 ②

$f(x)=\ln(x-1)$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}$$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln(t-1))$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{t-1}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln(t-1)=\frac{1}{t-1}(x-t)$$

이 직선이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$$-2-\ln(t-1)=-\frac{t}{t-1}$$

$$\therefore \ln(t-1)=\frac{2-t}{t-1}$$

즉 접선 l의 방정식은

$$y-\frac{2-t}{t-1}=\frac{1}{t-1}(x-t)$$

$$(t-1)y-2+t=x-t$$

$$\therefore x-(t-1)y-2t+2=0$$

원점에서 직선 $x-(t-1)y-2t+2=0$까지의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-2t+2|}{\sqrt{1^2+(t-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{4(t-1)^2}{t^2-2t+2}=2$$

$$2t^2-4t+2=t^2-2t+2$$

$$t^2-2t=0,\qquad t(t-2)=0$$

$$\therefore t=2\ (\because t>1)$$

따라서 접선 l의 기울기는

$$\frac{1}{2-1}=1$$

Ⓐ **230** 답 ②

곡선 $y=x^2$에서의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 $y'=2x$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$, 즉

$y=2tx-t^2$ ...... ㉠

곡선 $y=\frac{1}{x}$에서의 접점의 좌표를 $\left(s,\ \frac{1}{s}\right)$이라 하면 $y'=-\frac{1}{x^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}(x-s)$, 즉

$y=-\frac{1}{s^2}x+\frac{2}{s}$ ...... ㉡

이때 ㉠, ㉡이 일치해야 하므로

$$2t=-\frac{1}{s^2},\quad -t^2=\frac{2}{s}$$

$2t=-\frac{1}{s^2}$에서

$t=-\frac{1}{2s^2}$이므로

$$\frac{2}{s}=-t^2$$
$$=-\left(-\frac{1}{2s^2}\right)^2$$
$$=-\frac{1}{4s^4}$$

$-2-\ln(t-1)=-\frac{t}{t-1}$

에서

$\ln(t-1)$

$=\frac{t}{t-1}-2$

$=\frac{t}{t-1}-\frac{2t-2}{t-1}$

$=\frac{2-t}{t-1}$

즉 $-\frac{1}{4s^4}=\frac{2}{s}$이므로

$$s^3=-\frac{1}{8}$$

$$\therefore s=-\frac{1}{2},\ t=-2$$

따라서 접선의 방정식은 $y=-4x-4$이고 이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로 $\qquad a=-4$

Ⓐ **231** 답 ⑤

ㄱ. $h(3)=f(g(3))=f(1)=5$

ㄴ. $h'(2)=(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$f'(g(2))\le 0$이고 $g'(2)\le 0$이므로

$h'(2)\ge 0$

ㄷ. $h'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$에 대하여 구간 $(3,\ 4)$에서 $0<g(x)<1$이므로 $f'(g(x))>0$이고 $g'(x)<0$이다.

따라서 $h'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $(3,\ 4)$에서 감소한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Ⓐ **232** 답 ⑤

$f(x)=(ax+1)e^{x^2}$에서

$$f'(x)=ae^{x^2}+2x(ax+1)e^{x^2}$$
$$=(2ax^2+2x+a)e^{x^2}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로

$$f'(x)\ge 0$$

$e^{x^2}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$2ax^2+2x+a\ge 0$ ...... ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $a=0$일 때,

㉠은 $2x\ge 0$이 되어 성립하지 않는다.

(ii) $a\ne 0$일 때,

$a>0$이어야 하고 이차방정식 $2ax^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-2a\cdot a=1-2a^2\le 0$$

$$\therefore a^2\ge\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $a^2\ge\frac{1}{2}$이므로

$$m=\frac{1}{2}\qquad \therefore 10m=5$$

Ⓐ **233** 답 ④

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$에서

다큐 Board

$f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}$

$=\dfrac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}$

$f'(x)=0$에서

$x=\sqrt{a}$ ($\because x>0$)

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 0을 가지므로

$\dfrac{1}{2}(\sqrt{a})^2-a\ln\sqrt{a}=0$

$\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}a\ln a=0$

$\ln a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore a=e$

Ⓐ 234 답 ③

$f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-2)+e^{-x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x+2\right)$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이다.

즉 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+2$로 놓으면

$g(a)=0$

$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1+x}{x^2}<0$ ($\because x>0$)이므로

함수 $g(x)$는 $x>0$에서 연속이고 감소한다.

이때

$g(1)=1-\ln 1+2=3>0$,

$g(e)=\dfrac{1}{e}-\ln e+2=\dfrac{1}{e}+1>0$,

$g(e^2)=\dfrac{1}{e^2}-\ln e^2+2=\dfrac{1}{e^2}>0$,

$g(e^3)=\dfrac{1}{e^3}-\ln e^3+2=\dfrac{1}{e^3}-1<0$

이므로 사이값 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c가 구간 $(e^2,\ e^3)$에 적어도 하나 존재한다.

함수 $g(x)$가 구간 $[e^2,\ e^3]$에서 연속이고, $g(e^2)g(e^3)<0$이므로 $g(c)=0$인 c가 구간 $(e^2,\ e^3)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, a가 속하는 구간은 $(e^2,\ e^3)$이다.

보충학습

사이값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

Ⓐ 235 답 ①

$f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극댓값 $e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극솟값 $-e^{\frac{3}{2}\pi}$을 가지므로

$M=e^{\frac{\pi}{2}}$, $m=-e^{\frac{3}{2}\pi}$

$\therefore Mm=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot(-e^{\frac{3}{2}\pi})=-e^{2\pi}$

Ⓐ 236 답 ③

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2}{x}}=e^0=1$

ㄴ. $f(x)=e^{\frac{2}{x}}$에서 $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}$

$f'(x)=0$이 되는 x의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $x>0$에서 $f'(x)<0$이므로 $x>0$에서 $f(x)$는 감소하는 함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ 237 답 ①

$f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x$

몫의 미분법을 적용하면
$f'(x)$
$=\dfrac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{(e^{2x})^2}$
$=-\dfrac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$

$=e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$

$f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$

$+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)$

$=e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f'(a)=0$, $f''(a)>0$

이때 $e^{-2a}>0$이므로

$-2\sin a+\cos a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$3\sin a-4\cos a>0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\cos a=2\sin a$이므로 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

$\cos a=2\sin a$를 ㉡에 대입하면

$-5\sin a>0$ $\therefore \sin a<0$

따라서 $\tan a>0$, $\sin a<0$이므로

$$\pi<a<\frac{3}{2}\pi\ (\because 0<a<2\pi)$$

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$이므로

$$\cos^2 a=\frac{1}{\sec^2 a}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos a=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \left(\because \pi<a<\frac{3}{2}\pi\right)$$

Ⓐ 238 답 ③

$g(x)=\frac{f'(x)}{x}$에서 $f'(x)=xg(x)$ (단, $x\neq0$)

x	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$g(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $f(x)$는 열린 구간 $(b, 0)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.

ㄴ. $f(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, e]$에서 $x=b$, c, d에서 극값을 가지므로 3개의 극값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⅲ. 미분법

08 도함수의 활용 (2)

Ⓐ 239 답 ⑤

$f(x)=x+\sin x$에서

$$f'(x)=1+\cos x,\ f''(x)=-\sin x$$

ㄱ. 열린 구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 열린 구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하다.

$0<x<\pi$에서
$\sin x>0$
$\therefore -\sin x<0$

ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

$$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$$

열린 구간 $(0, \pi)$에서 $-1<\cos(x+\sin x)<1$, $-1<\cos x<1$이므로

$$1+\cos(x+\sin x)>0,\ 1+\cos x>0$$

$$\therefore g'(x)>0$$

즉 함수 $g(x)$는 열린 구간 $(0, \pi)$에서 증가한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, \pi)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=g'(c)$인 c가 열린 구간 $(0, \pi)$에 적어도 하나 존재한다.

이때

$$g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi,$$
$$g(0)=f(f(0))=f(0)=0$$

이므로 $\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$

따라서 $g'(x)=1$인 실수 x가 열린 구간 $(0, \pi)$에 존재한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

보충학습

평균값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

Ⓐ 240 답 ①

$f(x)=e^x\cos x$로 놓으면

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$
$$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$$
$$=-2e^x\sin x$$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$$-2e^x\sin x>0,\quad \sin x<0\ (\because e^x>0)$$
$$\therefore \pi<x<2\pi\ (\because 0<x<2\pi)$$

따라서 $b-a$의 최댓값은 $2\pi-\pi=\pi$

Ⓐ **241** 답 ⑤

$f(x)=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$으로 놓으면

$$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $\quad 1-\ln ax=0 \quad \therefore x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)>0$이고, $x>\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)<0$이다.

즉 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\quad\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$

이때 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$1=\frac{2e}{a} \qquad \therefore a=2e$$

Ⓐ **242** 답 ③

$f(x)=\cos^n x$로 놓으면

$$f'(x)=-n\cos^{n-1}x\sin x$$

$$f''(x)=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x-n\cos^n x$$

$$=n\cos^{n-2}x\{(n-1)\sin^2 x-\cos^2 x\}$$

$$=n\cos^{n-2}x(n-1-n\cos^2 x)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad \cos x=0$ 또는 $\cos^2 x=1-\frac{1}{n}$

그런데 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로

$$\cos^2 x=1-\frac{1}{n} \qquad \therefore \cos x=\sqrt{1-\frac{1}{n}}$$

따라서 $a_n=\cos^n x=\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

보충학습

무리수 e의 정의를 이용한 극한

0이 아닌 상수 a, b에 대하여

① $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

② $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{ax}\cdot ab}=e^{ab}$

③ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax\cdot\frac{b}{a}}=e^{\frac{b}{a}}$

Ⓐ **243** 답 ③

ㄱ. $f(x)=x^n e^{-x}$에서 $\quad f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$

또 $f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$이므로

$$f'\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}\cdot e^{-\frac{n}{2}}\cdot\frac{n}{2}=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\therefore f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$$

ㄴ. $f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=n$

$0<x<n$일 때 $f'(x)>0$이고 $x>n$일 때 $f'(x)<0$이다.

즉 $x=n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f''(x)=(n-1)x^{n-2}e^{-x}(n-x)$

$$+x^{n-1}\{-e^{-x}(n-x)-e^{-x}\}$$

$$=x^{n-2}e^{-x}(x^2-2nx+n^2-n)$$

$n=4$일 때, $f''(x)=x^2e^{-x}(x^2-8x+12)$이므로 $f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 점 $(0,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 할 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다큐 Board

$f'(x)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)=0$
에서 $e^{-x}>0$이므로
$x=0$ 또는 $x=n$

$1-\ln ax=0$에서
$\ln ax=1=\ln e$
$ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$

$f\left(\frac{e}{a}\right)=\left\{\ln\left(a\cdot\frac{e}{a}\right)\right\}^2=(\ln e)^2=1$

$f''(a)=0$이어도 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으면 점 $(a,\ f(a))$는 변곡점이 아니다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Ⓐ **244** 답 ①

ㄱ. 조건 ㈏에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다. 이때 조건 ㈎에서 $f(x)\neq 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq -1$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이때 조건 ㈏에서 $f(0)=0$이고, ㄱ에서 $f(x)\neq 1$, $f(x)\neq -1$이므로

$$-1<f(x)<1$$

따라서 조건 ㈐에서

$$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$$

$$=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

ㄷ. $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$에서

$$f''(x)=-2f(x)f'(x)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad f(x)=0\ (\because f'(x)>0)$

이때 $f(0)=0$이고 $x<0$일 때 $f(x)<0$이므로

$$f''(x)>0$$

$x>0$일 때 $f(x)>0$이므로 $\quad f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $(0,\ 0)$의 1개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

Ⓐ **245** 답 ③

주어진 표에서 $x<1$, $1<x<3$일 때 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 $f'(x)$는 증가하고 $f'(1)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $1<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 증가한다.

ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$에서

$$g'(x)=\cos(f(x))\cdot f'(x)$$

$$\therefore\ g'(3)=\cos(f(3))\cdot f'(3)=-1$$

ㄴ. 함수 $g(x)=\sin(f(x))$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $g'(c)=\cos(f(c))f'(c)$이고 $1<x<3$일 때 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$, $0<f'(x)<1$이므로

$$\frac{\pi}{2}<f(c)<\pi,\ 0<f'(c)<1$$

즉 $-1<\cos(f(c))f'(c)<0$이므로

$$-1<g'(c)<0$$

$$\therefore\ -1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$$

ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))\cdot f'(x)\cdot f'(x)$
$\qquad+\cos(f(x))\cdot f''(x)$

이므로

$$g''(1)=-\sin(f(1))\cdot f'(1)\cdot f'(1)+\cos(f(1))\cdot f''(1)=0$$

이지만 $x=1$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=g(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ 246 답 ⑤

ㄱ. $f'(x)=\frac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$이므로

$$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)$$

$$=\frac{4}{9}(x^2-3x+2)$$

$$=\frac{4}{9}(x-1)(x-2)$$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=2$

$x<1$ 또는 $x>2$일 때 $f''(x)>0$이고 $1<x<2$일 때 $f''(x)<0$이다.

즉 $x=1$, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(1, \frac{26}{27}\right)$, $(2, 2)$이다.

ㄴ. $f(x)=x$에서

$$x^4-6x^3+12x^2+19x=27x$$

$$x^4-6x^3+12x^2-8x=0$$

$$x(x^3-6x^2+12x-8)=0$$

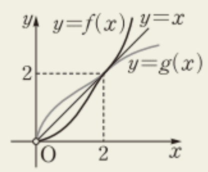
$$x(x-2)^3=0 \qquad \therefore\ x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.

다큐 Board

$\cos(f(3))\cdot f'(3)$
$=\cos\pi\cdot f'(3)$
$=-1\cdot 1=-1$

$f'(2)=1$이므로 접선의 방정식은 $\ y-2=x-2$
$\therefore\ y=x$



$1<x<3$에서 $f'(x)$는 증가하고 $f'(1)=0$, $f'(3)=1$이므로
$\ 0<f'(x)<1$

$1<x<3$에서 $f(x)$는 증가하고 $f(1)=\frac{\pi}{2}$, $f(3)=\pi$ 이므로
$\ \frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$

$x\to 1-$일 때,
$\ f(x)\to\frac{\pi}{2}+$,
$\ f'(x)\to 0-$,
$\ f''(x)>0$
이므로 $\ g''(x)<0$
$x\to 1+$일 때,
$\ f(x)\to\frac{\pi}{2}+$,
$\ f'(x)\to 0+$,
$\ f''(x)>0$
이므로 $\ g''(x)<0$

2	1	−6	12	−8
		2	−8	8
	1	−4	4	0

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 점 $(2, 2)$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 $y=x$이고 $f(x)$의 역함수 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$$f(2)=g(2),\ f'(2)=g'(2)$$

따라서 $F(x)=|f(x)-g(x)|$로 놓으면

$$F'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|f(2+h)-g(2+h)|}{h}$$

이때

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-g(2+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)-g(2+h)+g(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$

$$=f'(2)-g'(2)=0$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-f(2+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)-f(2+h)+f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=g'(2)-f'(2)=0$$

$$\therefore\ F'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}=0$$

따라서 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓐ 247 답 ④

ㄱ. $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$에서 $\qquad f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$$f'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha^2}=0$$

$$\therefore\ e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$$

ㄴ. $f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}$에서 $x>0$일 때 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다.

ㄷ. ㄴ에서 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

또 $f'(\alpha)=0$이고 $f''(\alpha)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이면서 최소이다. 즉 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다큐 Board

Ⓐ 248 답 ③

ㄱ. $f''(b)=f''(0)=f''(c)=f''(e)=0$

또한 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점은 4개이다.

ㄴ.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	d	$\cdots$	f	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$가 극대가 되는 x는 $x=d$ 하나뿐이다.

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓐ 249 답 ④

$f(x)=2e^{-x}$으로 놓으면

$$f'(x)=-2e^{-x}$$

이므로 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})$에서의 접선의 방정식은

$$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$$

$$\therefore\ y=-2e^{-t}x+2e^{-t}(t+1)$$

따라서 $\mathrm{A}(0,\ 2e^{-t})$, $\mathrm{B}(0,\ 2e^{-t}(t+1))$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=2te^{-t}$$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2te^{-t}\cdot t$$

$$=t^2e^{-t}$$

이므로

$$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=te^{-t}(2-t)$$

$S'(t)=0$에서 $\quad t=2\ (\because\ t>0)$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

따라서 $S(t)$는 $t=2$일 때 극대이면서 최대이다.

Ⓐ 250 답 ④

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$에서

$$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}$$
$$+e^{x+1}(2x+n-2)+a$$
$$=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$$

$f(x)$가 역함수를 가지려면 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)$가 역함수를 가지려면 $f(x)$는 일대일 대응이어야 하므로 $f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$

$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$이라 하면

$$h'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$$
$$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$
$$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$$

$h'(x)=0$에서 $\quad x=-n-1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $h(-1)=2-n$을 갖는다.

㉠에서 $2-n+a\geq 0$이므로

$$a\geq n-2$$

즉 $g(n)=n-2$이므로 $1\leq g(n)\leq 8$에서

$$1\leq n-2\leq 8$$

$$\therefore\ 3\leq n\leq 10$$

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$$3+4+5+\cdots+10=\frac{8(3+10)}{2}$$

$$=52$$

첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열의 합은 $\dfrac{n(a+l)}{2}$

Ⓐ 251 답 20

$\angle\mathrm{SOT}=\theta$이므로

$$\angle\mathrm{POS}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}=t\left(0\leq t<\dfrac{\pi}{4}\right)$로 놓으면 $\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{OP}}=\cos t$,

$\overline{\mathrm{SP}}=\sin t$이고 $\overline{\mathrm{QS}}=\cos t-\sin t$이므로

$$D=\cos^2 t-\frac{1}{2}\cdot(\cos t-\sin t)^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\cos^2 t-\frac{\pi}{4}(1-\sin 2t)$$

$(\cos t-\sin t)^2$
$=\cos^2 t+\sin^2 t$
$\quad -2\sin t\cos t$
$=1-2\sin t\cos t$
$=1-\sin 2t$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dD}{dt}=-2\cos t\sin t-\frac{\pi}{4}(-2\cos 2t)$$

$$=-\sin 2t+\frac{\pi}{2}\cos 2t$$

$\dfrac{dD}{dt}=0$에서 $\quad \sin 2t=\dfrac{\pi}{2}\cos 2t$

$$\therefore\ \tan 2t=\frac{\pi}{2}$$

$\tan 2t=\dfrac{\pi}{2}$를 만족시키는 t의 값을 α라 하면 $t=\alpha$의 좌우에서 $\dfrac{dD}{dt}$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 D는 $t=\alpha$일 때 극대이면서 최대이다.

$\dfrac{dD}{dt}$
$=-\sin 2t+\dfrac{\pi}{2}\cos 2t$
$=-\cos 2t\left(\tan 2t-\dfrac{\pi}{2}\right)$
$0\leq t<\dfrac{\pi}{4}$에서 $-\cos 2t<0$이고 $\tan 2t$는 증가하는 함수이므로 $t=\alpha$의 좌우에서 $\dfrac{dD}{dt}$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

이때 $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}=\alpha$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$이므로

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$$

$$=\cot 2\alpha=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore\ 10\pi\tan\theta=10\pi\cdot\frac{2}{\pi}=20$$

Ⓐ **252** 답 ⑤

$f(x)=2x\cos x$에서

$$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$$

ㄱ. $f'(a)=0$에서 $\quad 2\cos a-2a\sin a=0$

$f'(0)=2$이므로 $a\neq0$이다.

$$\therefore \tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{1}{a}$$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고,

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 실수 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$에 존재한다.

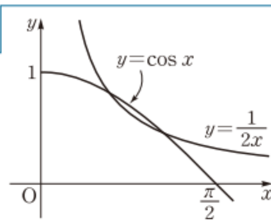
이때 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖도록 하는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$에 존재한다.

$f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

ㄷ. $x\neq0$일 때 $f(x)=1$에서

$$2x\cos x=1 \qquad \therefore \cos x=\frac{1}{2x}$$

$y=\cos x$와 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



$x=\frac{\pi}{3}$일 때, $\cos\frac{\pi}{3}>\frac{3}{2\pi}$이므로 $y=\cos x$의 그래프가 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프보다 위에 있다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓐ **253** 답 72

$g(x)=f(x)e^{-x}$에서

$$g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$$

$$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$로 놓으면

$$f'(x)=2ax+b,$$

$$f''(x)=2a$$

즉 $g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$이고

조건 ㈎에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1$, $x=4$이므로 방정식 $ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$은 $x=1$, $x=4$를 두 근으로 갖는다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\frac{4a-b}{a}=5,\ \frac{2a-2b+c}{a}=4$$

이므로

$$b=-a,\ c=0$$

$$\therefore f(x)=ax^2-ax,\ g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$$

$g'(t)$
$=\{f'(t)-f(t)\}e^{-t}$
$=(2at-a-at^2+at)e^{-t}$
$=(-at^2+3at-a)e^{-t}$

한편 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{T}(t, g(t))$에서 그은 접선의 방정식은

$$y-g(t)=g'(t)(x-t)$$

이 접선이 점 $(0, k)$를 지나므로

$$k-g(t)=g'(t)(0-t)$$

$$\therefore k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$으로 놓으면 조건 ㈏에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

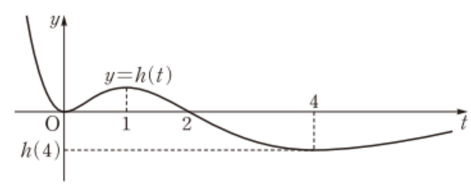
$h'(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$이므로 $h'(t)=0$에서

$$t=0 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } t=4$$

(i) $a<0$일 때,

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↘	0	↗	$-\frac{a}{e}$	↘	$\frac{32a}{e^4}$	↗

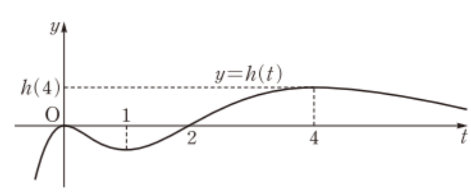
함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로 함수 $y=h(t)$와 $y=k\,(-1<k<0)$의 그래프의 교점의 개수가 3인 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a>0$일 때,

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	↗	0	↘	$-\frac{a}{e}$	↗	$\frac{32a}{e^4}$	↘

함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같으므로 함수 $y=h(t)$와 $y=k\,(-1<k<0)$의 그래프의 교점의 개수가 3이기 위해서는 $h(1)=-1$이어야 한다.



(i), (ii)에서 $h(1)=-1$이므로

$$-\frac{a}{e}=-1$$

$$\therefore a=e$$

따라서 $g(x)=(x^2-x)e^{1-x}$이므로

$$g(-2)\times g(4)=6e^3\cdot\frac{12}{e^3}=72$$

254 답 ③

$f(x)=2\ln(5-x)+\frac{1}{4}x^2$에서

$$f'(x)=\frac{-2}{5-x}+\frac{x}{2}=\frac{2}{x-5}+\frac{x}{2}$$

$$f''(x)=\frac{-2}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=4$

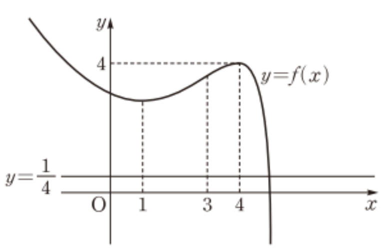
$f''(x)=0$에서 $\quad x=3\ (\because x<5)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$은 다음 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

255 답 ⑤

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$이므로 $\qquad f'(1)=1$

따라서 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=x-1,\ \text{즉 } 2x-2y-1=0$$

직선 $2x-2y-1=0$과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ㄴ. $f'(x)=0$에서 $\qquad \dfrac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}=0$

$$x(3x-4)=0 \qquad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	$\frac{27}{40}$	↘

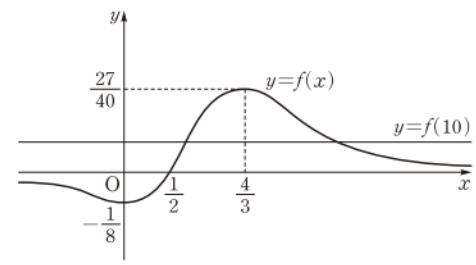
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $\qquad f(0)=-\frac{1}{8}$

다큐 Board

$f(x)$
$=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-2x+2)^{-2}$
이므로
$f'(x)$
$=(x^2-2x+2)^{-2}$
$\quad -2\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-2)$
$\qquad \times(x^2-2x+2)^{-3}$
$=(x^2-2x+2)^{-3}$
$\quad \times(x^2-2x+2-4x^2$
$\qquad +6x-2)$
$=\dfrac{-3x^2+4x}{(x^2-2x+2)^3}$
$=\dfrac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이고 $0<f(10)<\frac{27}{40}$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f(10)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)-f(10)=0$, 즉 $f(x)=f(10)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

256 답 34

(i) $x>0$일 때

$f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}$이므로

$$f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\qquad 2-2\ln x=0 \qquad \therefore x=e$

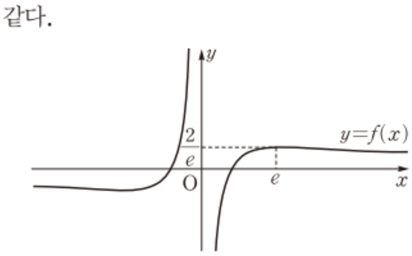
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극댓값을 가지므로

$$a=f(e)=\frac{2}{e}$$

(ii) $x\neq0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to0+}f(x)=-\infty$이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편 $y=\frac{2}{en}x$는 원점을 지나는 직선이고 원점에서 곡선 $y=\frac{2\ln x}{x}$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2\ln t}{t}\right)$라 하면 접선의 방정식은

$$y=\frac{2-2\ln t}{t^2}(x-t)+\frac{2\ln t}{t}$$

이 접선이 원점을 지나므로

$0=\frac{2-2\ln t}{t^2}(0-t)+\frac{2\ln t}{t}$

$\therefore t=\sqrt{e}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$

$n=1$일 때, 직선 $y=\frac{2}{e}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 0이므로 $a_1=0$

직선 $y=\frac{2}{e}x$의 기울기 $\frac{2}{e}$는 접선의 기울기 $\frac{1}{e}$보다 크다.

$n=2$일 때, 직선 $y=\frac{1}{e}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이므로 $a_2=2$

$3\le n\le 10$일 때, 직선 $y=\frac{2}{en}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 4이므로 $a_n=4$

직선 $y=\frac{2}{en}x$의 기울기 $\frac{2}{en}$는 접선의 기울기 $\frac{1}{e}$보다 작다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=0+2+4\times 8=34$

Ⓐ **257** 답 ③

$f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{(x^2+x+1)-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 -1을 갖는다.
따라서 $a\le -1$이므로 실수 a의 최댓값은 -1이다.

Ⓐ **258** 답 ①

$x+2-ae^{x+1}\le 0$에서 $\frac{x+2}{e^{x+1}}\le a$

$f(x)=\frac{x+2}{e^{x+1}}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{-x-1}{e^{x+1}}$

$f'(x)=\frac{e^{x+1}-(x+2)e^{x+1}}{(e^{x+1})^2}=\frac{-x-1}{e^{x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $-x-1=0$

$\therefore x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 1을 가지므로
$f(x)\le a$가 항상 성립하려면 $a\ge 1$
즉 a의 최솟값은 1이다.

Ⓐ **259** 답 ①

$f(x)=2x-\tan x-\sin x$라 하면

$f'(x)=2-\sec^2 x-\cos x$

$=2-\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x$

$=\frac{-\cos^3 x+2\boxed{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x}$

이때 $g(x)=-\cos^3 x+2\boxed{\cos^2 x}-1$이라 하면

$g'(x)=3\cos^2 x\sin x-4\cos x\sin x$

$=\sin x\cos x(\boxed{3\cos x-4})$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서
$0<\cos x<1$,
$0<\sin x<1$,
$-4<3\cos x-4<-1$
이므로 $g'(x)<0$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(x)<0$이므로 $f'(x)<0$

또한 $f(0)=0$이므로 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)<0$이다.

즉 $2x-\tan x-\sin x<0$이므로

$2x<\tan x+\sin x$

따라서 $h_1(x)=\cos^2 x$, $h_2(x)=3\cos x-4$이므로

$h_1\left(\frac{\pi}{6}\right)+h_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\frac{\pi}{6}+3\cos\frac{\pi}{3}-4$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}-4$

$=-\frac{7}{4}$

09 여러 가지 적분법

Ⓐ 260 답 ②

$$\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx=3\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=3\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=3\left(\frac{2}{3}-0\right)=2$$

Ⓐ 261 답 ⑤

$$f(\pi)-f(0)=\int_0^{\pi} f'(x)dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$=-\cos\pi+\cos 0$$
$$=-(-1)+1=2$$

Ⓐ 262 답 ③

구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)=e^x$이므로

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int e^x dx=e^x+C_1$$

$f'(0)=1$에서 $C_1=0$이므로 구간 $(0,\ 1)$에서

$$f'(x)=e^x$$

또 $f(x)=\int f'(x)dx=\int e^x dx=e^x+C_2$이고

$f(0)=1$에서 $C_2=0$이므로 구간 $(0,\ 1)$에서

$$f(x)=e^x$$
$$\therefore f(1)=e,\ f'(1)=e$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

조건 (나)에 의하여 $1\le x<2$에서

$$f'(1)\le f'(x),\ \text{즉 } e\le f'(x)$$
$$\therefore \int_1^x e\,dt\le\int_1^x f'(t)dt$$

$\int_1^x e\,dt=\left[et\right]_1^x=ex-e$, $\int_1^x f'(t)dt=\left[f(t)\right]_1^x=f(x)-f(1)=f(x)-e$

이므로 $ex-e\le f(x)-e$

$\therefore ex\le f(x)$

즉 $ex\le f(x)$이므로 $\int_1^2 ex\,dx\le\int_1^2 f(x)dx$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$\ge\int_0^1 e^x dx+\int_1^2 ex\,dx$$
$$=\left[e^x\right]_0^1+\left[\frac{e}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=(e-1)+\left(2e-\frac{e}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{2}e-1$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{5}{2}e-1$이다.

Ⓐ 263 답 ④

$\ln x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

또 $x=e$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_e^{e^3}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^3 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$$

Ⓐ 264 답 ①

$2x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=2$

또 $x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1 2e^{2x}dx=\int_0^2 e^t dt=\left[e^t\right]_0^2=e^2-1$$

Ⓐ 265 답 ①

$2x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=2$

또 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)$$
$$=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

Ⓐ 266 답 ①

$a-x=t$로 놓으면 $\quad \frac{dt}{dx}=-1$

또 $x=a-1$일 때 $t=1$, $x=a+1$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_{a-1}^{a+1} f(a-x)dx=\int_1^{-1} f(t)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_{-1}^1 f(t)dt$$

$a>b$일 때, $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 우함수이다.

$$\int_{-1}^1 f(t)dt=2\int_0^1 f(t)dt=24$$
$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=12$$

보충학습

우함수와 기함수의 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f(-x)=f(x)$, 즉 $f(x)$가 우함수이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

② $f(-x)=-f(x)$, 즉 $f(x)$가 기함수이면

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

Ⓐ 267 답 ②

$\ln x=s$로 놓으면 $\quad \dfrac{ds}{dx}=\dfrac{1}{x}$

또 $x=e^2$일 때 $s=2$, $x=e^3$일 때 $s=3$이므로

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx=\int_2^3(a+s)ds$$
$$=\left[as+\frac{1}{2}s^2\right]_2^3$$
$$=a+\frac{5}{2}$$

$$\left[as+\frac{1}{2}s^2\right]_2^3=\left(3a+\frac{9}{2}\right)-(2a+2)=a+\frac{5}{2}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\quad \dfrac{dt}{dx}=\cos x$

또 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1(1+t)dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{3}{2}$$

$$\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 $a+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$이므로

$\quad a=-1$

Ⓐ 268 답 ④

$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}dt$에서

$1+e^t=s$로 놓으면 $\quad \dfrac{ds}{dt}=e^t$

또 $t=0$일 때 $s=2$, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$$f(x)=\int_0^x\frac{e^t}{1+e^t}dt$$
$$=\int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}ds$$
$$=\Big[\ln|s|\Big]_2^{1+e^x}$$
$$=\ln(1+e^x)-\ln 2$$
$$=\ln\frac{1+e^x}{2}$$

$\therefore (f\circ f)(a)=f(f(a))$

$$=\ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2}$$
$$=\ln\frac{1+\frac{1+e^a}{2}}{2}$$
$$=\ln\frac{3+e^a}{4}$$

즉 $\ln\dfrac{3+e^a}{4}=\ln 5$이므로

$\quad \dfrac{3+e^a}{4}=5, \qquad e^a=17$

$\quad \therefore a=\ln 17$

Ⓐ 269 답 ④

$$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$
$$=\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^8 g(x)dx$$

이때 $\displaystyle\int_0^8 g(x)dx$는 상수이므로 주어진 식은

$\displaystyle\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

주어진 그래프에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 1, 6이고 $0\le x\le 1$일 때

$f(x)\ge g(x)$, $1\le x\le 6$일 때

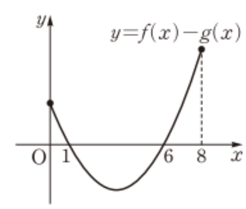
$f(x)\le g(x)$, $6\le x\le 8$일 때

$f(x)\ge g(x)$이므로

$0\le x\le 8$에서 함수

$y=f(x)-g(x)$의 그래프의

개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\displaystyle\int_0^a\{f(x)-g(x)\}dx$의 값은 $a=6$일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$$

$$\int_6^8 g(x)dx=\int_6^8\frac{4-(x-4)}{2}dx=\int_6^8\left(4-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_6^8\left(4-\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+\left[4x-\frac{x^2}{4}\right]_6^8$$
$$=16-5\ln 10$$

Ⓐ 270 답 2

$$\int_0^1(1+2e^{-x})dx=\Big[x-2e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=\left(1-\frac{2}{e}\right)-(0-2)$$
$$=3-\frac{2}{e}$$

또 $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\therefore \int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)$$
$$=-\frac{2}{e}+1$$

$$\therefore \int_0^1(1+2e^{-x})dx-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$=3-\frac{2}{e}-\left(-\frac{2}{e}+1\right)=2$$

다큐 Board

Ⓐ **271** 답 ③

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 조건 (가)에 의하여

$$h(x)=\{f(x)g(x)\}'$$

즉 $f(x)g(x)=\int h(x)dx$이므로

$$xg(x)=\int \ln x\,dx$$

$$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\ln x-x+C$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore \int \ln x\,dx$

$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$\therefore g(x)=\ln x-1+\frac{C}{x}\ (\because x>0)$$

또 $g(1)=-1$이므로

$$-1=-1+C \qquad \therefore C=0$$

따라서 $g(x)=\ln x-1$이므로

$$g(e)=\ln e-1=0$$

Ⓐ **272** 답 ④

$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$에서 $u(x)=\{f(x)\}^2$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$$u'(x)=2f(x)f'(x),\ v(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\therefore \int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$$

$$=\left[-\frac{\{f(x)\}^2}{x}\right]_a^{2a}-\int_a^{2a}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot 2f(x)f'(x)\,dx$$

$2f(x)f'(x)=f(2x)$

$$=-\frac{\{f(2a)\}^2}{2a}+\frac{\{f(a)\}^2}{a}+\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

$f(a)=0$

$$=-\frac{\{f(2a)\}^2}{2a}+\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(2a)=2f(a)f'(a)$에서

$$f(2a)=0$$

$$\therefore -\frac{\{f(2a)\}^2}{2a}=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$에서 $\frac{x}{2}=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}$$

또 $x=2a$일 때 $t=a$, $x=4a$일 때 $t=2a$이므로

$$\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^{2a}2\cdot\frac{f(2t)}{2t}dt$$

$$=\int_a^{2a}\frac{f(2t)}{t}dt$$

$$=k \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=0+k=k$$

Ⓐ **273** 답 ④

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f'(x)g(x)dx$$

$$=\{f(1)g(1)-f(0)g(0)\}-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$$

$g(1)=1$, $g(0)=0$

$$=f(1)-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx=\frac{1}{6} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$에서 $1+x^3=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=3x^2$$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=\frac{1}{6}$$

따라서 ㉠에서

$$f(1)-\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx=f(1)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

이므로

$$f(1)=\frac{1}{3}$$

Ⓐ **274** 답 ③

조건 (나)에서

$$g(x)=\frac{4}{e^4}\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\int_1^x 2te^{t^2}\cdot\frac{f(t)}{t}dt$$

$u(t)=\frac{f(t)}{t}$, $v'(t)=2te^{t^2}$으로 놓으면 조건 (가)에 의하여

$$u'(t)=\left(\frac{f(t)}{t}\right)'=t^2e^{-t^2},\ v(t)=e^{t^2}$$

이므로

$$g(x)=\frac{2}{e^4}\int_1^x 2te^{t^2}\cdot\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{\left[e^{t^2}\cdot\frac{f(t)}{t}\right]_1^x-\int_1^x e^{t^2}\cdot t^2e^{-t^2}dt\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{e^{x^2}\cdot\frac{f(x)}{x}-e\cdot f(1)-\int_1^x t^2dt\right\}$$

$f(1)=\frac{1}{e}$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{\frac{e^{x^2}f(x)}{x}-1-\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x\right\}$$

$$=\frac{2}{e^4}\left\{\frac{e^{x^2}f(x)}{x}-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\right\}$$

$$\therefore g(2)=\frac{2}{e^4}\left\{\frac{e^4f(2)}{2}-\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\right\}=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

$$\therefore f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$$

Ⓐ **275** 답 ④

$\int_0^1 tf(t)\,dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$$f(x)=e^{x^2}+a$$

$$\therefore a=\int_0^1 tf(t)\,dt=\int_0^1 (te^{t^2}+at)\,dt$$

$$=\int_0^1 te^{t^2}dt+\int_0^1 at\,dt$$

이때 $\int_0^1 te^{t^2}dt$에서 $t^2=k$로 놓으면 $\frac{dk}{dt}=2t$

또 $t=0$일 때 $k=0$, $t=1$일 때 $k=1$이므로

$$\int_0^1 te^{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^k dk=\frac{1}{2}\Big[e^k\Big]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

한편 $\int_0^1 at\,dt=a\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}a$이므로

$$a=\frac{1}{2}(e-1)+\frac{1}{2}a \qquad \therefore a=e-1$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)\,dx=e-1$$

Ⓐ **276** 답 ③

$\int_1^e f(t)\,dt=a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x)=\frac{2}{x}+a$이므로

$$\int_1^e f(t)\,dt=\int_1^e\left(\frac{2}{t}+a\right)dt=\Big[2\ln|t|+at\Big]_1^e$$

$$=2+ae-a$$

즉 $a=2+ae-a$이므로

$$a(2-e)=2 \qquad \therefore a=\frac{2}{2-e}$$

따라서 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{2-e}$이므로

$$f(e-2)=\frac{2}{e-2}+\frac{2}{2-e}=0$$

Ⓐ **277** 답 ①

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=e^x+a$$

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$0=1+a \qquad \therefore a=-1$$

$\int_0^0 f(t)dt=0$

따라서 $f(x)=e^x-1$이므로

$$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-1=2-1=1$$

Ⓐ **278** 답 ②

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$$

$f(x)=h$로 놓으면 $\frac{dh}{dx}=f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$

또 $f(0)=0$, $f(a)=\frac{1}{2}$에서 $x=0$일 때 $h=0$, $x=a$일 때 $h=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} e^h dh=\Big[e^h\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-1$$

Ⓐ **279** 답 ①

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1),\ 즉\ f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$$

$$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=\pi^2\int_0^1 x\cdot\frac{2}{\pi}f'(x)dx$$

$$=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$$

이때

$$\int_0^1 xf'(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_0^1-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$$

이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(1)=1$에서 $f(-1)=-1$이다.

즉 $f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt=-1$이므로

$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{2}{\pi}$$

$\frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)dt=-1$이므로 $\int_1^0 f(t)dt=-\frac{2}{\pi}$ 즉 $-\int_0^1 f(t)dt=-\frac{2}{\pi}$이므로 $\int_0^1 f(t)dt=\frac{2}{\pi}$

$$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi\left\{f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right\}$$

$$=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=2(\pi-2)$$

Ⓐ **280** 답 24

$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(g(x))g'(x)=\frac{1}{2}f(x)$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f(g(2))g'(2)=\frac{1}{2}f(2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \{3(t-1)^2+5\}dt$$

$$=\int_0^x (3t^2-6t+8)dt$$

$$=\Big[t^3-3t^2+8t\Big]_0^x$$

$$=x^3-3x^2+8x$$

이므로

$$F(g(2))=\frac{1}{2}F(2)=6$$

$\frac{1}{2}F(2)=\frac{1}{2}(2^3-3\cdot 2^2+8\cdot 2)=\frac{1}{2}\cdot 12=6$

이때 $g(2)=a$로 놓으면

$a^3-3a^2+8a=6$

$a^3-3a^2+8a-6=0$

$(a-1)(a^2-2a+6)=0$

$\therefore a=1\ (\because a^2-2a+6>0)$

즉 $g(2)=1$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$f(1)g'(2)=\frac{1}{2}f(2)$

이때 $f(1)=5$, $g'(2)=p$, $f(2)=8$이므로

$5p=\frac{1}{2}\cdot 8$

$\therefore p=\frac{4}{5}$

$\therefore 30p=30\cdot\frac{4}{5}=24$

다큐 Board

1	1	-3	8	-6
		1	-2	6
	1	-2	6	0

Ⓐ 281 답 9

$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$에서 $x-t=z$로 놓으면

$\frac{dz}{dt}=-1$

또 $t=0$일 때 $z=x$, $t=x$일 때 $z=0$이므로

$$F(x)=\int_x^0 (x-z)f(z)\cdot(-1)dz$$
$$=\int_0^x (x-z)f(z)dz$$
$$=x\int_0^x f(z)dz-\int_0^x zf(z)dz$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$F'(x)=\int_0^x f(z)dz+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(z)dz$$
$$=\int_0^x \frac{1}{1+z}dz$$
$$=\Big[\ln|1+z|\Big]_0^x$$
$$=\ln(1+x)$$

따라서 $F'(a)=\ln 10$에서

$\ln(1+a)=\ln 10$

$1+a=10$

$\therefore a=9$

Ⓐ 282 답 ⑤

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})=e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$

$e^{-\sqrt{\pi}}>0$이고 $0\le t\le\sqrt{\pi}$에서 $\sin(t^2)\ge 0$이므로

$f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(a)=\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}}$$

을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f(0)=0$, $f(\sqrt{\pi})>0$이므로

$f'(a)>0$

을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(\sqrt{\pi})=-e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt+e^{-\sqrt{\pi}}\sin\pi$

$=-f(\sqrt{\pi})<0$

이때 ㄴ의 a에 대하여 $f'(x)$가 닫힌 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 $f'(a)>0$, $f'(\sqrt{\pi})<0$이므로 사이값 정리에 의하여

$f'(b)=0$

을 만족시키는 b가 열린 구간 $(a, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

보충학습

사이값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여

$f(c)=k$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

Ⓐ 283 답 35

조건 (나)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$

이때 $f'(x)\ge 0$이고 $4-2f(x)\ge 0$에서

$f(x)\le 2$

조건 (가)에서 $x\le b$일 때 $f'(x)=2a(x-b)$이므로

$2a(x-b)=\sqrt{4-2\{a(x-b)^2+c\}}$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$4-2c=0$

$\therefore c=2$

㉠의 양변을 제곱하면

$4a^2(x-b)^2=-2a(x-b)^2$

$4a^2(x-b)^2$
$=4-2\{a(x-b)^2+2\}$
$=4-2a(x-b)^2-4$
$=-2a(x-b)^2$

x^2의 계수를 비교하면

$4a^2=-2a,\quad 2a(2a+1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

이때 $b\le 0$이면 $f(b)=2$이고 $f(0)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이라는 조건에 모순이다.

조건 (나)에서 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=0$

즉 $b>0$이므로 $f(x)=a(x-b)^2+2$에서

$$f(0)=ab^2+2=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(ⅰ) $a=0$일 때, ㉡은 성립하지 않는다.

(ⅱ) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$$-\frac{1}{2}b^2+2=0, \quad b^2=4$$

$$\therefore b=2$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$이므로

다큐 Board

모든 실수 x에 대하여
$f'(x)\ge 0$, $f(x)\le 2$
이고 $f(2)=2$이므로
$x>2$일 때
$f(x)=2$

$$\int_0^6 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+\left[2x\right]_2^6$$

$$=\left(4-\frac{4}{3}\right)+(12-4)=\frac{32}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=32$이므로

$$p+q=35$$

Ⓐ 284 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^3 \frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\ln|x|\right]_1^3$$

$$=\ln 3$$

Ⓐ 285 답 ③

$x_k=1+\frac{k}{n}$이므로

$$f(x_k)=e^{1+\frac{k}{n}}$$

따라서 $A_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot e^{1+\frac{k}{n}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot e^{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot e^{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[xe^x\right]_1^2-\int_1^2 e^x dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2e^2-e)-\left[e^x\right]_1^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(2e^2-e)-(e^2-e)\}$$

$$=\frac{1}{2}e^2$$

Ⓐ 286 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}=\frac{1}{\sqrt{n^2\left\{4-\left(\frac{n+k}{n}\right)^2\right\}}}=\frac{1}{n\sqrt{4-\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-(1+x)^2}}dx$$

$1+x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$$

또 $x=0$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-(1+x)^2}}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta$$

$$=\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

보충학습

삼각치환법을 이용한 정적분

① 피적분함수가 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 꼴

➔ $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환한 후 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용한다.

② 피적분함수가 $\frac{1}{a^2+x^2}$ $(a>0)$ 꼴

➔ $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환한 후 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$임을 이용한다.

Ⅳ. 적분법

10 정적분의 활용

Ⓐ 287 답 ①

$\int_0^2 f(2x)dx$에서 $2x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또 $x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt$$

이때 A의 넓이는 $\int_0^3 f(x)dx=6$

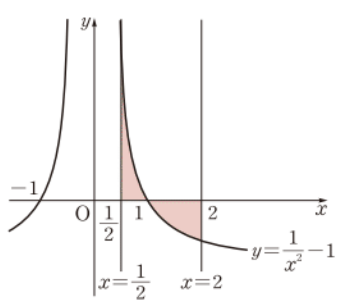
B의 넓이는

$$\int_3^4 |f(x)|dx=-\int_3^4 f(x)dx=2$$

이므로

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx$$
$$=6-2=4$$
$$\therefore \int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

Ⓐ 288 답 ②



위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx+\int_1^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{x}-x\right]_{\frac{1}{2}}^1+\left[x+\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=-2-\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}-2=1$$

Ⓐ 289 답 100

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

이때 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$=1-(-1)=2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

따라서 $a=2$이므로 $50a=100$

Ⓐ 290 답 ③

$e^x=xe^x$에서 $(x-1)e^x=0$ $\therefore x=1$ $(\because e^x>0)$

A의 넓이는

$$a=\int_0^1(e^x-xe^x)dx=\int_0^1(1-x)e^x dx$$
$$=\left[(1-x)e^x\right]_0^1+\int_0^1 e^x dx$$
$$=-1+\left[e^x\right]_0^1=-1+e-1=e-2$$

B의 넓이는

$$b=\int_1^2(xe^x-e^x)dx=\int_1^2(x-1)e^x dx$$
$$=\left[(x-1)e^x\right]_1^2-\int_1^2 e^x dx$$
$$=e^2-\left[e^x\right]_1^2=e^2-(e^2-e)=e$$

$\therefore b-a=e-(e-2)=2$

Ⓐ 291 답 ①

곡선 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\frac{2}{3}x$의 교점의 x좌표는

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$에서 $3xe^{x^2}=2xe^{x^2}+2x$

$x(e^{x^2}-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{\ln 2}$

이때 두 함수 $y=\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$, $y=\frac{2}{3}x$는 모두 기함수이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left|\frac{2}{3}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right|dx$$
$$=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left|\frac{4}{3}x-\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right|dx$$
$$=\left[\left|\frac{2}{3}x^2-\ln(e^{x^2}+1)\right|\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$$
$$=\left|\frac{2}{3}\ln 2-\ln 3-(-\ln 2)\right|$$
$$=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$$

Ⓐ 292 답 ⑤

ㄱ. $f(x)>0$이므로 $\int_n^{n+1}f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n$, $x=n+1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

다큐 Board

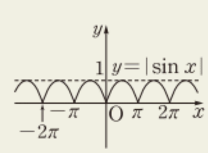
등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ $(a\neq 0)$은 $|r|<1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$

단축Key

$b-a$
$$=\int_1^2(xe^x-e^x)dx-\int_0^1(e^x-xe^x)dx$$
$$=\int_1^2(x-1)e^x dx+\int_0^1(x-1)e^x dx$$
$$=\int_0^2(x-1)e^x dx$$
$$=\left[(x-1)e^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx$$
$$=(e^2+1)-\left[e^x\right]_0^2$$
$$=(e^2+1)-(e^2-1)$$
$$=2$$

$e^{x^2}-2=0$에서
$e^{x^2}=2$, $x^2=\ln 2$
$\therefore x=\pm\sqrt{\ln 2}$

정의역의 임의의 원소 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$
➔ $f(x)$는 기함수
➔ 그래프가 원점에 대하여 대칭



주기가 p인 함수 $f(x)$에 대하여
$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p}f(x)dx$$

또 두 점 P_n, Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P_n', Q_n'이라 하면 직사각형 $P_nP_n'Q_n'Q_n$의 넓이는 $(n+1-n)f(n)$, 즉 $f(n)$이므로

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = f(n) - (A_n + B_n)$$

ㄴ. $A_n = \dfrac{1}{2}\cdot 1 \cdot \{f(n)-f(n+1)\}$

$$= \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-n-1})$$

$$= \frac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$$

$$= \frac{e-1}{2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{Q_nP_{n+1}}$
$=\overline{Q_nQ_n'}-\overline{P_{n+1}Q_n'}$
$=f(n)-f(n+1)$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\dfrac{1}{e}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\frac{e-1}{2e^2}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{2e}$$

ㄷ. $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_n^{n+1}$

$$= -e^{-n-1} + e^{-n}$$

$$= \frac{e-1}{e^{n+1}} = 2A_n \ (\because ㉠)$$

ㄱ에서 $2A_n = f(n) - (A_n + B_n)$이므로

$$B_n = f(n) - 3A_n$$

이때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - 3\sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$= \frac{1}{e-1} - \frac{3}{2e} = \frac{3-e}{2e(e-1)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓐ **293** 답 96

$f(x) = \displaystyle\int_0^x (a-t)e^t dt$에서

$$f'(x) = (a-x)e^x$$

$f'(x) = 0$에서 $\quad x = a \ (\because e^x > 0)$

즉 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이면서 최대이므로 $x=a$에서 최댓값 32를 갖는다.

또

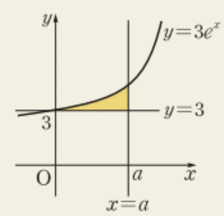
$$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$$

$$= \Big[(a-t)e^t\Big]_0^x - \int_0^x (-e^t)dt$$

$$= \Big[(a-t)e^t\Big]_0^x + \Big[e^t\Big]_0^x$$

$$= (a-x)e^x - a + e^x - 1$$

$$= (a+1-x)e^x - a - 1$$



이므로 $\quad f(a) = e^a - a - 1 = 32$

$\therefore e^a - a = 33 \qquad \cdots\cdots ㉠$

따라서 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^a (3e^x - 3)dx = \Big[3e^x - 3x\Big]_0^a$$

$$= (3e^a - 3a) - 3$$

$$= 3(e^a - a) - 3$$

$$= 3\cdot 33 - 3 \ (\because ㉠)$$

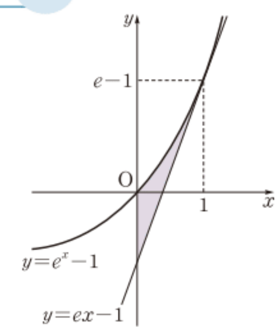
$$= 96$$

Ⓐ **294** 답 ①

$y = e^x - 1$에서 $y' = e^x$이므로 점 $P(1,\ e-1)$에서의 접선 l의 방정식은

$$y - (e-1) = e(x-1),\ 즉\ y = ex - 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 \{(e^x-1)-(ex-1)\}dx$$

$$= \int_0^1 (e^x - ex)dx$$

$$= \Big[e^x - \frac{e}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \frac{e}{2} - 1$$

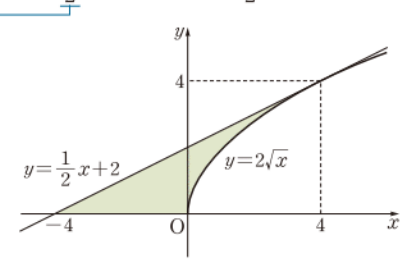
$$= \frac{e}{2} - 1$$

Ⓐ **295** 답 ⑤

$y = 2\sqrt{x}$에서 $y' = x^{-\frac{1}{2}}$이므로 점 $(4,\ 4)$에서의 접선 l의 방정식은

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x-4),\ 즉\ y = \frac{1}{2}x + 2$$

곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위의 점 $(4,\ 4)$에서의 접선 l의 기울기는
$4^{-\frac{1}{2}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$



다큐 Board

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4-\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx=16-2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=16-2\cdot\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

Ⓐ **296** 답 ④

$x\sin x=-x$에서 $x(\sin x+1)=0$

$x\neq 0$일 때 $\sin x=-1$이므로

$$x=\frac{3}{2}\pi+2\pi(n-1)\ (n\text{은 자연수})$$

즉 $n\geq 2$일 때

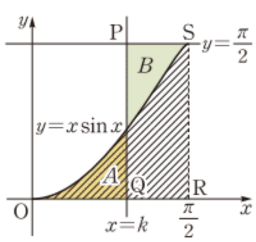
$$S_n=\int_{-\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi}^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}(x\sin x+x)dx$$
$$=\left[-x\cos x+\sin x+\frac{1}{2}x^2\right]_{-\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi}^{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2-\frac{1}{2}\left\{-\frac{\pi}{2}+2(n-1)\pi\right\}^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(4n\pi-3\pi)\cdot 2\pi$$
$$=\pi^2(4n-3)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)\pi^2}{n}=4\pi^2$$

$\int x\sin x\,dx$
$=-x\cos x$
$\quad -\int(-\cos x)dx$
$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$
$=-x\cos x+\sin x+C$

A^2-B^2
$=(A+B)(A-B)$

Ⓐ **297** 답 ③

오른쪽 그림에서 A, B의 넓이가 같으므로 빗금 친 부분의 넓이와 직사각형 PQRS의 넓이가 같다.



$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-k\right)\frac{\pi}{2}$$

이때

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

이므로 $\left(\frac{\pi}{2}-k\right)\frac{\pi}{2}=1$, $\frac{\pi}{2}-k=\frac{2}{\pi}$

$$\therefore k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$$

다른풀이 A의 넓이를 S_A라 하면

$$S_A=\int_0^k x\sin x\,dx$$
$$=\left[-x\cos x\right]_0^k+\int_0^k\cos x\,dx$$
$$=-k\cos k+\left[\sin x\right]_0^k$$
$$=-k\cos k+\sin k$$

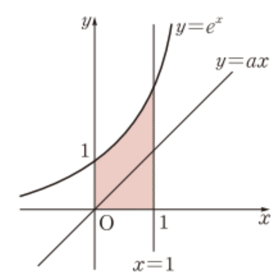
B의 넓이를 S_B라 하면

$$S_B=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\sin x\right)dx$$
$$=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx-\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$
$$=\left[\frac{\pi}{2}x\right]_k^{\frac{\pi}{2}}-\left(\left[-x\cos x\right]_k^{\frac{\pi}{2}}+\int_k^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)-k\cos k-\left[\sin x\right]_k^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)-k\cos k-1+\sin k$$

이때 $S_A=S_B$에서

$$-k\cos k+\sin k$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)-k\cos k-1+\sin k$$
$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-k\right)-1=0,\quad \frac{\pi}{2}-k=\frac{2}{\pi}$$
$$\therefore k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$$

Ⓐ **298** 답 ③



위의 그림에서 함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$$

S가 직선 $y=ax$에 의하여 이등분되므로

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a=\frac{1}{2}(e-1)\qquad \therefore a=e-1$$

Ⓐ **299** 답 ①

주어진 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^{e-1}\{\ln(x+1)-a\}dx=0$$
$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx-\int_0^{e-1}a\,dx=0$$
$$\left[x\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx-\left[ax\right]_0^{e-1}=0$$
$$e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx-a(e-1)=0$$
$$e-1-\left[x-\ln|x+1|\right]_0^{e-1}-a(e-1)=0$$
$$e-1-(e-1-1)-a(e-1)=0$$
$$1-a(e-1)=0\qquad \therefore a=\frac{1}{e-1}$$

단축Key
$x+1=t$로 놓으면
$\frac{dt}{dx}=1$
또 $x=0$일 때 $t=1$,
$x=e-1$일 때 $t=e$이므로
$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$
$=\int_1^e\ln t\,dt$
$=\left[t\ln t\right]_1^e-\int_1^e 1\,dt$
$=e-\left[t\right]_1^e$
$=e-(e-1)=1$

Ⓐ **300** 답 ②

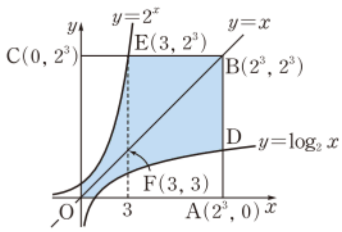
$y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$n=3$일 때,

$A(2^3,\ 0)$, $B(2^3,\ 2^3)$, $C(0,\ 2^3)$

이때 직선 BC와 곡선 $y=2^x$이 만나는 점을 E라 하면 점 E의 좌표는 $(3,\ 2^3)$

점 E를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(3,\ 3)$



따라서 색칠된 부분의 넓이를 S라 하면

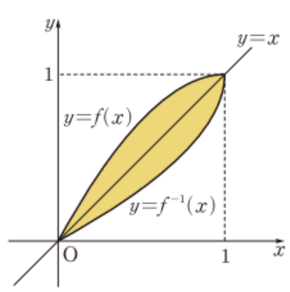
$$S=2\left\{\int_0^3 (2^x-x)dx+\triangle\mathrm{BEF}\right\}$$
$$=2\left(\left[\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3+\frac{1}{2}\cdot5\cdot5\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{2^3}{\ln 2}-\frac{9}{2}-\frac{1}{\ln 2}\right)+\frac{25}{2}\right\}$$
$$=2\left(\frac{7}{\ln 2}+8\right)$$
$$=16+\frac{14}{\ln 2}$$

$y=2^x$에서
$x=\log_2 y$
이때 x와 y를 서로 바꾸면
$y=\log_2 x$
따라서 $y=\log_2 x$는 $y=2^x$의 역함수이다.

점 E의 좌표를 $(a,\ 2^a)$이라 하면 $2^a=2^3$이므로
$a=3$
$\therefore\ E(3,\ 2^3)$

Ⓐ **301** 답 ④

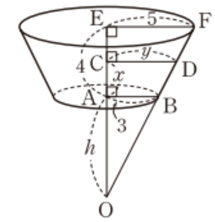
함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-x\right)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)$$
$$=-1+\frac{4}{\pi}$$

Ⓐ **302** 답 ③



위의 그림과 같이 원뿔대 모양의 그릇에서 그릇의 아랫면으로부터의 높이가 x인 곳까지 물을 채웠을 때, 수면의 반지름의 길이를 y라 하자.

이때 삼각형 OAB와 삼각형 OEF는 닮음이므로

$h:3=(h+4):5,\quad 5h=3(h+4)$

$2h=12\qquad\therefore\ h=6$

또 삼각형 OAB와 삼각형 OCD는 닮음이므로

$6:3=(6+x):y,\quad 6y=3(6+x)$

$\therefore\ y=3+\frac{x}{2}$

따라서 높이가 x일 때 수면의 반지름의 길이는 $3+\frac{x}{2}$이므로 그릇에 가득 담긴 물의 부피는

$$\pi\int_0^4\left(3+\frac{x}{2}\right)^2dx$$

Ⓐ **303** 답 ④

x좌표가 $t\ (0\le t\le1)$일 때의 단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{t}+1$이므로 단면의 넓이는

$(\sqrt{t}+1)^2=t+2\sqrt{t}+1$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^1(t+2\sqrt{t}+1)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1$$
$$=\frac{17}{6}$$

Ⓐ **304** 답 ②

점 P의 좌표가 $(x,\ e^{\frac{x}{2}})\ (0\le x\le2)$일 때 선분 PH의 길이가 $e^{\frac{x}{2}}$이므로 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{\frac{x}{2}})^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}e^x$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}e^x dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{4}e^x\right]_0^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}e^2-\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(e^2-1)$$

다큐 Board

Part Ⓑ
예상 문제로 수능 유형 잡기

Ⅰ. 지수함수와 로그함수

01 지수함수

Ⓑ 001 답 11

함수 $y=3^{x-1}$의 그래프가 점 $(a,\ 3)$을 지나므로

$3=3^{a-1}$에서 $\quad a-1=1 \quad \therefore a=2$

함수 $y=3^{x-1}$의 그래프가 점 $(3,\ b)$를 지나므로

$b=3^{3-1}$에서 $\quad b=9$

$\therefore a+b=11$

Ⓑ 002 답 ②

함수 $f(x)=a^x$에 대하여 $f\left(\frac{1}{3}\right)=2$이므로

$2=a^{\frac{1}{3}} \quad \therefore a=2^3=8$

$\therefore f(x)=8^x$

이때 $f(k)=2\sqrt{2}$이므로 $\quad 8^k=2\sqrt{2}$

$2^{3k}=2^{\frac{3}{2}},\quad 3k=\frac{3}{2} \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

Ⓑ 003 답 ①

두 함수 $y=3^{x+m}$, $y=3^{-x}$의 그래프가 y축과 만나는 점은 각각 $\quad$ A$(0,\ 3^m)$, B$(0,\ 1)$

$y=3^{x+m}$에 $x=0$을 대입하면
$y=3^m$
$\therefore$ A$(0,\ 3^m)$
$y=3^{-x}$에 $x=0$을 대입하면
$y=3^0=1$
$\therefore$ B$(0,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AB}}=8$에서 $\quad 3^m-1=8,\quad 3^m=9 \quad \therefore m=2$

Ⓑ 004 답 ②

주어진 조건에서

$0<b<a<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

두 함수 $y=a^{px}$, $y=b^{qx}$의 그래프가 일치하므로

$a^p=b^q$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad p>0,\ q>0$ 또는 $p<0,\ q<0$

(ⅰ) $p>0,\ q>0$일 때, $\quad p>q \quad \therefore 0<q<p$

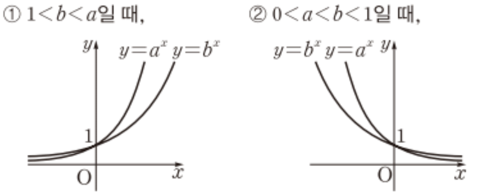
(ⅱ) $p<0,\ q<0$일 때, $\quad p<q \quad \therefore p<q<0$

따라서 $p,\ q$의 값이 될 수 있는 것은 ②이다.

보충학습

지수함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프는 $a,\ b$의 값의 범위에 따라 다음과 같이 그려진다.

① $1<b<a$일 때, $\qquad$ ② $0<a<b<1$일 때,



Ⓑ 005 답 ⑤

$y=a\cdot b^x$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$ab^2=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$ab^{-3}=\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\quad b^5=8$

㉠의 양변을 세제곱하면

$(ab^2)^3=a^3b^6$

$a^3b^6=4^3=64$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡의 양변을 제곱하면

$(ab^{-3})^2=a^2b^{-6}$

$a^2b^{-6}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢×㉣을 하면 $\quad a^5=16$

$\therefore a^5+b^5=16+8=24$

Ⓑ 006 답 32

$y=2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $\quad y=2^{-(x-2)}=2^{-x+2}$

이 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=2^{x+2}$

이 그래프가 점 $(3,\ a)$를 지나므로

$a=2^5=32$

Ⓑ 007 답 ①

(ⅰ) $x<0$일 때, $f(x)=x+1$이므로

$y=2^{f(x)}=2^{x+1}$

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동

(ⅱ) $x\ge0$일 때, $f(x)=-x+1$이므로

$y=2^{f(x)}=2^{-x+1}$

$y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동

(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=2^{f(x)}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ①이다.

Ⓑ 008 답 ③

$y=2^{x-a}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 $\quad \overline{\mathrm{AB}}=a$

직사각형 ACDB의 넓이가 20이므로

$a\times2a=20,\quad 2a^2=20$

$a^2=10 \quad \therefore a=\sqrt{10}\ (\because a>0)$

다른풀이 점 A의 x좌표를 b라 하면

$2^b=2a \quad \therefore b=\log_2 2a=1+\log_2 a$

점 B의 x좌표를 c라 하면

$2^{c-a}=2a,\quad c-a=\log_2 2a$

$\therefore c=1+\log_2 a+a$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=(1+\log_2 a+a)-(1+\log_2 a)=a$

직사각형 ACDB의 넓이가 20이므로

$a\times2a=20,\quad 2a^2=20$

$a^2=10 \quad \therefore a=\sqrt{10}\ (\because a>0)$

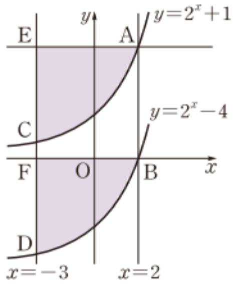
Ⓑ **009** 답 25

직선 $x=2$가 두 곡선 $y=2^x+1$, $y=2^x-4$와 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$

직선 $x=-3$이 두 곡선 $y=2^x+1$, $y=2^x-4$와 만나는 점을 각각 C, D라 하면

$\mathrm{C}\left(-3,\ \frac{9}{8}\right)$, $\mathrm{D}\left(-3,\ -\frac{31}{8}\right)$



한편 곡선 $y=2^x-4$는 곡선 $y=2^x+1$을 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림의 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.

직선 $x=-3$이 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 만나는 점을 E, 직선 $x=-3$이 x축과 만나는 점을 F라 하면 구하는 넓이는 직사각형 AEFB의 넓이와 같으므로

$\{2-(-3)\}\times 5=25$

$\overline{\mathrm{AE}}=2-(-3)=5$,
$\overline{\mathrm{AB}}=5-0=5$

Ⓑ **010** 답 881

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M이 y축 위의 점이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0 \qquad \therefore \alpha+\beta=0$

중점이 y축 위의 점이므로 중점의 x좌표가 0이다.

$\therefore f(\alpha)f(\beta)=\left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha-2}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\beta-2}$

$=\left(\frac{5}{4}\right)^{\alpha+\beta-4}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-4}$

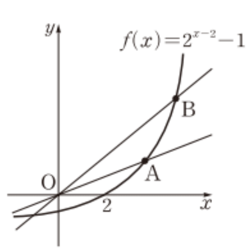
$=\frac{256}{625}$

따라서 $p=625$, $q=256$이므로

$p+q=881$

Ⓑ **011** 답 ③

ㄱ. 직선 OA, OB의 기울기는 각각 $\frac{f(a)}{a}$, $\frac{f(b)}{b}$이므로



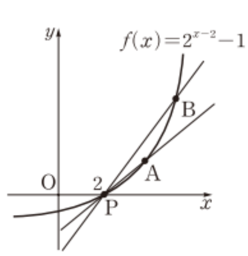
$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$

$\therefore bf(a)<af(b)$

ㄴ. 곡선 $f(x)=2^{x-2}-1$과 x축의 교점을 P라 하면

$\mathrm{P}(2,\ 0)$

직선 AP, BP의 기울기는 각각 $\frac{f(a)}{a-2}$, $\frac{f(b)}{b-2}$이므로



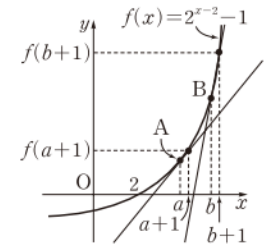
$\frac{f(a)}{a-2}<\frac{f(b)}{b-2}$

$(b-2)f(a)<(a-2)f(b)$

$bf(a)-2f(a)<af(b)-2f(b)$

$\therefore bf(a)-af(b)<2f(a)-2f(b)$

ㄷ. 두 점 $(a,\ f(a))$, $(a+1,\ f(a+1))$을 지나는 직선의 기울기는



$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$
$=f(a+1)-f(a)$

이고 두 점 $(b,\ f(b))$, $(b+1,\ f(b+1))$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{f(b+1)-f(b)}{(b+1)-b}=f(b+1)-f(b)$

이므로

$f(a+1)-f(a)<f(b+1)-f(b)$

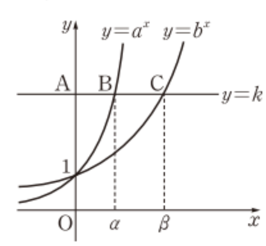
$\therefore f(b+1)-f(a+1)>f(b)-f(a)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓑ **012** 답 ④

두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $\quad a^\alpha=k$, $b^\beta=k$

$\therefore \alpha=\log_a k$, $\beta=\log_b k$



$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$, 즉 α, $\beta-\alpha$, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면
$2b=a+c$

$2(\beta-\alpha)=\alpha+\beta, \qquad 2\beta-2\alpha=\alpha+\beta$

$\therefore 3\alpha=\beta$

즉 $3\log_a k=\log_b k$이므로 $\quad \frac{3}{\log_k a}=\frac{1}{\log_k b}$

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$일 때,
$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\log_k a=\log_k b^3 \qquad \therefore a=b^3$

$\therefore \log_b a+\log_a b^2=\log_b b^3+\log_{b^3} b^2$

$=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

Ⓑ **013** 답 68

$y=2^{x^2+3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=2^{x^2+3}\cdot 2^{-2x}=2^{x^2+3-2x}=2^{(x-1)^2+2}$

$f(x)=(x-1)^2+2$로 놓으면 $0\le x\le 3$에서

$2\le f(x)\le 6$

$y=2^{f(x)}$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 y도 최대이고 $f(x)$가 최소일 때 y도 최소이다.

즉 $f(x)=6$일 때, $\quad M=2^6=64$

$f(x)=2$일 때, $\quad m=2^2=4$

$\therefore M+m=68$

보충학습

범위가 주어진 이차함수의 최대·최소

x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$인 이차함수 $f(x)=a(x-m)^2+n$의 최대·최소

(1) $\alpha \le m \le \beta$일 때

➔ $f(m)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값

(2) $m<\alpha$ 또는 $m>\beta$일 때

➔ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

Ⓑ 014 답 ①

$-4 \le x \le 3$일 때, $0 \le |x| \le 4$이므로

$-4 \le -|x| \le 0 \quad \therefore -1 \le 3-|x| \le 3$

이때 $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \le \left(\frac{1}{5}\right)^{3-|x|} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$이므로

$\frac{1}{125} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{3-|x|} \le 5$

따라서 $M=5$, $m=\frac{1}{125}$이므로

$Mm=\frac{1}{25}$

Ⓑ 015 답 ③

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x} \ge 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

등호는 $2^x=2^{-x}$일 때 성립하므로
$2^{2x}=1$, $\quad 2x=0$
$\therefore x=0$

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=(t^2-2)+8t+5$

$=t^2+8t+3$

$=(t+4)^2-13 \ (t \ge 2)$

따라서 $t=2$일 때, 즉 $x=0$일 때 y는 최솟값 23을 가지므로 $\quad a=0$, $m=23$

$(t+4)^2-13$에 $t=2$를 대입하면
$(2+4)^2-13=23$

$\therefore a+m=23$

보충학습

a^x+a^{-x}을 포함한 함수의 최대·최소

$a^x+a^{-x}(a>0, a\ne1)$을 포함한 함수의 최대·최소는 $a^x+a^{-x}=t \ (t \ge 2)$로 치환하여 t에 대한 함수의 최대·최소를 구한다.

Ⓑ 016 답 ③

단축Key
$2^a>0$, $2^b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$2^a+2^b \ge 2\sqrt{2^{a+b}}$
$=2\sqrt{2^2}=4$
(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)
따라서 최솟값은 4이다.

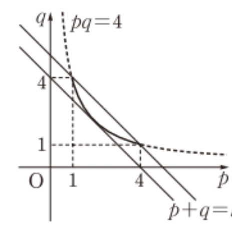
$a \ge 0$, $b \ge 0$, $a+b=2$에서 $0 \le a \le 2$, $0 \le b \le 2$이므로

$1 \le 2^a \le 4$, $1 \le 2^b \le 4$

$2^a=p$, $2^b=q$로 놓으면 $\quad 1 \le p \le 4$, $1 \le q \le 4$

이때 $2^a \cdot 2^b=2^{a+b}=2^2=4$이므로

$pq=4$



$2^a+2^b=p+q=k$로 놓으면 오른쪽 그림과 같이 직선 $p+q=k$가 점 $(1, 4)$, $(4, 1)$을 지날 때 k의 값이 최대이다.

$\therefore M=1+4=5$

또 직선 $p+q=k$가 곡선 $pq=4$에 접할 때 k의 값은 최소이다.

$p=k-q$를 $pq=4$에 대입하면

$(k-q)q=4$, $\quad q^2-kq+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-16=0$

$k^2=16 \quad \therefore k=4 \ (\because k \ge 2)$

$1 \le p \le 4$, $1 \le q \le 4$

$\therefore m=4$

$\therefore M^2+m^2=5^2+4^2=41$

Ⓑ 017 답 ⑤

$16^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x^2}=0$에서

$16^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x^2}$, $\quad 2^{4x}=2^{x^2-5}$

$4x=x^2-5 \quad \therefore x^2-4x-5=0$

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-5$

Ⓑ 018 답 ⑤

곡선 $y=2^{\frac{x}{4}}$과 직선 $y=kx$가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 점의 x좌표가 α, β이므로 x에 대한 방정식

$2^{\frac{x}{4}}=kx$의 두 근이 α, β이다.

$\therefore 2^{\frac{\alpha}{4}}=k\alpha$, $2^{\frac{\beta}{4}}=k\beta$

이때 $2^{\frac{\alpha}{4}} : 2^{\frac{\beta}{4}}=\alpha : \beta(\because k\ne0)$이고 $\alpha : \beta=1 : 2$이므로

$2 \cdot 2^{\frac{\alpha}{4}}=2^{\frac{\beta}{4}}$, 즉 $2^{\frac{\alpha}{4}+1}=2^{\frac{\beta}{4}}$

따라서 $\frac{\alpha}{4}+1=\frac{\beta}{4}$이므로 $\quad \alpha+4=\beta$

이때 $\beta=2\alpha$이므로 위의 식에 대입하여 정리하면

$\alpha=4$, $\beta=8$

$2^{\frac{\alpha}{4}}=k\alpha$에 $\alpha=4$를 대입하면 $\quad 2^{\frac{4}{4}}=k \cdot 4$

$4k=2 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$

Ⓑ 019 답 ④

$3 \cdot 4^x-19 \cdot 2^x+20=0$에서 $2^x=t \ (t>0)$로 놓으면

$3t^2-19t+20=0$, $\quad (3t-4)(t-5)=0$

$\therefore t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=5$

주어진 방정식의 두 근이 α, $\beta(\alpha<\beta)$이므로

$2^\alpha=\frac{4}{3}$, $2^\beta=5$

$\therefore 2^{\beta-\alpha}=\dfrac{2^{\beta}}{2^{\alpha}}=\dfrac{5}{\frac{4}{3}}=\dfrac{15}{4}$

Ⓑ 020 답 ①

$4^x+2a\cdot 2^x+8-2a=0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2+2at+8-2a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-(8-2a)>0$

$a^2+2a-8>0,\quad (a+4)(a-2)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>2$

(ii) (두 근의 합)$=-2a>0$에서 $\quad a<0$

(iii) (두 근의 곱)$=8-2a>0$에서 $\quad a<4$

이상에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $\quad a<-4$

Ⓑ 021 답 ③

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_2 3$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2^{x+\log_2 3}-2=3\cdot 2^x-2$

$2^{x+\log_2 3}=2^x\cdot 2^{\log_2 3}$
$=3\cdot 2^x$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표는 방정식 $4^x=3\cdot 2^x-2$, 즉 $4^x-3\cdot 2^x+2=0$의 실근이다.

$4^x-3\cdot 2^x+2=0$에서 $2^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-3t+2=0,\quad (t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉 $2^x=1$ 또는 $2^x=2$이므로 $\quad x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore$ P$(0,\ 1)$, Q$(1,\ 4)$ 또는 P$(1,\ 4)$, Q$(0,\ 1)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-0)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$

Ⓑ 022 답 35

$(2^x-4)^3+(4^x-2)^3=(4^x+2^x-6)^3$에서

$(2^x-4)^3+(4^x-2)^3=(2^x-4+4^x-2)^3$

$2^x-4=a$, $4^x-2=b$로 놓으면

$a^3+b^3=(a+b)^3,\quad 3ab(a+b)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $a+b=0$

(i) $a=0$, 즉 $2^x-4=0$에서

$2^x=4 \quad \therefore x=2$

(ii) $b=0$, 즉 $4^x-2=0$에서

$4^x=2,\quad 2^{2x}=2$

$2x=1 \quad \therefore x=\dfrac{1}{2}$

(iii) $a+b=0$, 즉 $4^x+2^x-6=0$에서

$(2^x)^2+2^x-6=0$

$(2^x+3)(2^x-2)=0$

$2^x>0$이므로 $\quad 2^x=2 \quad \therefore x=1$

이상에서 실수 x의 값은 2, $\dfrac{1}{2}$, 1이므로

$S=2+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{7}{2}$

$\therefore 10S=10\cdot\dfrac{7}{2}=35$

Ⓑ 023 답 ③

$81=3^4=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$이므로 주어진 부등식은

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-5}$

이때 밑이 1보다 작으므로

$2x-5<-4<x$

$\therefore -4<x<\dfrac{1}{2}$

$2x-5<-4$에서
$2x<1 \quad \therefore x<\dfrac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=\dfrac{1}{2}$이므로

$\alpha\beta=-2$

Ⓑ 024 답 ③

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3x}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x^2<-3x,\quad x^2+3x<0$

$x(x+3)<0 \quad \therefore -3<x<0$

$\therefore A=\{x\,|\,-3<x<0\}$

$3^{|x-1|}<3^a$에서 밑이 1보다 크므로

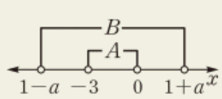
$|x-1|<a,\quad -a<x-1<a$

$\therefore 1-a<x<1+a$

$\therefore B=\{x\,|\,1-a<x<1+a\}$

이때 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로

$1-a\le -3,\ 0\le 1+a$



$1-a\le -3$에서 $\quad a\ge 4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$0\le 1+a$에서 $\quad a\ge -1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a\ge 4$

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 4이다.

Ⓑ 025 답 ④

모든 실수 x에 대하여 $x^2-(2^{a+1}-4)x+2^a>0$이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-(2^{a+1}-4)x+2^a=0$, 즉 $x^2-2(2^a-2)x+2^a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2^a-2)^2-2^a<0$

$2^{2a}-4\cdot 2^a+4-2^a<0,\quad 2^{2a}-5\cdot 2^a+4<0$

$2^a=t\,(t>0)$로 놓으면 $\quad t^2-5t+4<0$

$(t-1)(t-4)<0 \quad \therefore 1<t<4$

즉 $2^0<2^a<2^2$이고 밑이 1보다 크므로

$0<a<2$

Ⓑ 026 답 3

$2^{-2x}+3\cdot2^{-(x-1)}+a-3>0$에서 $2^{-x}=t\ (t>0)$로 놓으면

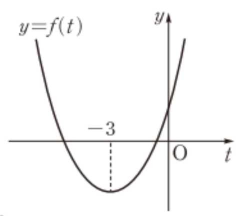
$t^2+6t+a-3>0$

$2^{-2x}=(2^{-x})^2=t^2$,
$3\cdot2^{-(x-1)}=6\cdot2^{-x}=6t$

이때 $f(t)=t^2+6t+a-3$으로 놓으면

$f(t)=t^2+6t+a-3=(t+3)^2+a-12$

이므로 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 $f(t)>0$이려면 오른쪽 그림에서 $f(0)=a-3\geq0$이어야 한다.



$\therefore a\geq3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

Ⓑ 027 답 ②

$4^x-5\cdot2^{x+1}+16<0$에서 $2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-10t+16<0,\qquad (t-2)(t-8)<0$

$4^x-5\cdot2^{x+1}+16$
$=2^{2x}-5\cdot2\cdot2^x+16$
$=t^2-10t+16$

$\therefore 2<t<8$

즉 $2<2^x<2^3$이고 밑이 1보다 크므로

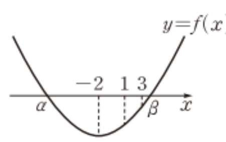
$1<x<3$

$\therefore B=\{x|1<x<3\}$

$f(x)=x^2+4x+a$로 놓고 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면

$f(x)=x^2+4x+a$
$=(x+2)^2+a-4$

$A=\{x|\alpha<x<\beta\}$이고, $B\subset A$이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(3)\leq0$에서 $\qquad 9+12+a\leq0$

$\therefore a\leq-21$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -21이다.

02 로그함수

Ⓑ 028 답 ①

$f(a)=\log_3 a=5,\ f(b)=\log_3 b=4$이므로

$$f\left(\frac{3b}{a^2}\right)=\log_3\frac{3b}{a^2}$$
$$=\log_3 3b-\log_3 a^2$$
$$=1+\log_3 b-2\log_3 a$$
$$=1+4-2\cdot5$$
$$=-5$$

$\log_3 3b$
$=\log_3 3+\log_3 b$
$=1+\log_3 b$

보충학습

로그의 성질

$a>0,\ a\neq1$이고 $M>0,\ N>0$일 때

① $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a N^k=k\log_a N$(단, k는 실수)

Ⓑ 029 답 ④

$f(g(x))=\log_2(\log_4 x)$이므로

$f(g(a))=\log_2(\log_4 a)=-2$

$\log_4 a=2^{-2}=\frac{1}{4}\qquad\therefore a=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$

$4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

Ⓑ 030 답 ④

$b_1=\log_2 a_1=\log a_2$이므로

$a_1=2^{b_1},\ a_2=10^{b_1}$

$b_2=\log_2 a_2=\log a_3$이므로

$a_2=2^{b_2},\ a_3=10^{b_2}$

$$\therefore 5^{b_1+b_2}=5^{b_1}\cdot5^{b_2}=\left(\frac{10}{2}\right)^{b_1}\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^{b_2}$$
$$=\frac{10^{b_1}\cdot10^{b_2}}{2^{b_1}\cdot2^{b_2}}=\frac{a_2\cdot a_3}{a_1\cdot a_2}=\frac{a_3}{a_1}$$

Ⓑ 031 답 ①

함수 $y=\log_2(2x+8)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2\{2(x-4)+8\}-5$

$y=\log_2 2x-5$

$\log_2 2x-5$
$=\log_2 2+\log_2 x-5$
$=\log_2 x-4$

$\therefore y=\log_2 x-4\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x=\log_2 y-4,\qquad x+4=\log_2 y$

$\therefore y=2^{x+4}$

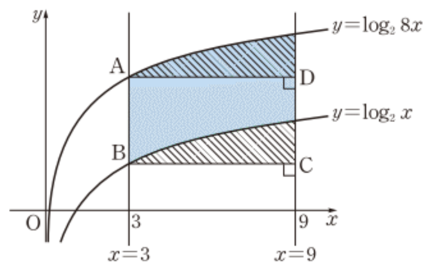
이 그래프가 점 $(k,\ 32)$를 지나므로

$2^{k+4}=32=2^5,\qquad k+4=5\qquad\therefore k=1$

Ⓑ **032** 답 18

$y=\log_2 8x=\log_2 8+\log_2 x=\log_2 x+3$이므로 함수 $y=\log_2 8x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.



따라서 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로

$(9-3)\cdot 3=18$

Ⓑ **033** 답 ②

$\overline{AC}=-\log_2 a$, $\overline{BD}=\log_2 b$이므로 $\overline{AC}:\overline{BD}=3:4$에서

$-\log_2 a:\log_2 b=3:4,\quad 3\log_2 b=-4\log_2 a$

$\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=-\dfrac{4}{3}\qquad \therefore \log_a b=-\dfrac{4}{3}$

Ⓑ **034** 답 ④

$y=\log_2 \dfrac{1}{x+1}=-\log_2(x+1)$이므로

$\overline{A_nB_n}=2\log_2\left(\dfrac{1}{n}+1\right)=2\log_2 \dfrac{n+1}{n}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{63}\overline{A_nB_n}=\sum_{n=1}^{63}2\log_2 \dfrac{n+1}{n}$

$=2\left(\log_2 \dfrac{2}{1}+\log_2 \dfrac{3}{2}+\cdots+\log_2 \dfrac{64}{63}\right)$

$=2\log_2\left(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{64}{63}\right)$

$=2\log_2 64=2\log_2 2^6=12$

Ⓑ **035** 답 ⑤

$A(a, b)$이므로 $B(a, \log_2 a)$이고, $\overline{BC}=12$이므로

$C(a+12, \log_4(a+12))$,

$D(a+12, \log_2(a+12))$

두 점 B, C의 y좌표가 같으므로 $\log_2 a=\log_4(a+12)$에서

$\log_2 a=\dfrac{1}{2}\log_2(a+12)$

$\log_2 a^2=\log_2(a+12)$

$a^2=a+12,\qquad a^2-a-12=0$

$(a+3)(a-4)=0\qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$

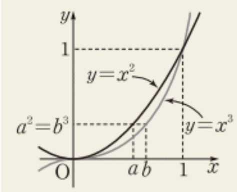
$\therefore B(4, \log_2 4)$, $C(16, \log_4 16)$,

$D(16, \log_2 16)$, 즉

$B(4, 2)$, $C(16, 2)$, $D(16, 4)$

따라서 $A(4, 4)$이므로 $\quad a=4,\ b=4$

$\therefore ab=16$



$y=\log_2 8x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 직사각형 ABCD의 세로의 길이는 3이다.

로그함수 $y=\log_a f(x)$ $(a>0,\ a\neq 1)$에서
① $a>1$이면 $f(x)$가 최대일 때 y도 최대, $f(x)$가 최소일 때 y도 최소
② $0<a<1$이면 $f(x)$가 최대일 때 y는 최소, $f(x)$가 최소일 때 y는 최대

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ N>0$일 때,
$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

$\log_2 256=\log_2 2^8=8$

$4^{y-3}=2^{2(y-3)}=2^{2y-6}$

Ⓑ **036** 답 ①

ㄱ. $0<x<1$일 때, $y=x^2$의 그래프는 $y=x^3$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $a^2=b^3$이면 $\quad a<b$

ㄴ. $0<x<1$일 때, $y=4^x$의 그래프가 $y=2^x$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $2^a=4^b$이면 $\quad b<a$

ㄷ. $x>1$일 때, $y=\log_2 x$의 그래프가 $y=\log_3 x$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $\log_2 \dfrac{1}{a}=\log_3 \dfrac{1}{b}$이면

$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\qquad \therefore a>b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

Ⓑ **037** 답 ①

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+5)$

$=\log_{\frac{1}{2}}\{(x-1)^2+4\}$

밑이 1보다 작으므로 $x=1$일 때, 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}4=-2$를 갖는다.

Ⓑ **038** 답 10

$y=(\log_3 x)^2-\log_9 x^8+3=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

따라서 $t=2$일 때, 즉 $x=9$일 때 y는 최솟값 -1을 가지므로 $\quad a=9,\ m=-1$

$\therefore a-m=10$

Ⓑ **039** 답 8

$f(x)=\log_2 x+3=\log_2 8x$이고

$g(x)=\log_2\{-2(x-8)\}=\log_2(-2x+16)$이므로

$f(x)+g(x)=\log_2 8x+\log_2(-2x+16)$

$=\log_2\{-16(x^2-8x)\}$

$=\log_2\{-16(x-4)^2+256\}$

이때 밑이 1보다 크므로 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $\log_2 256=8$을 갖는다.

Ⓑ **040** 답 ②

$y=\log_4(x-2)+3$에서 $\qquad y-3=\log_4(x-2)$

$x-2=4^{y-3},\qquad x-2=2^{2y-6}$

$\therefore x=2^{2y-6}+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=2^{2x-6}+2$

즉 함수 $y=\log_4(x-2)+3$의 역함수는 $y=2^{2x-6}+2$이므로 $\quad a=2,\ b=-6,\ c=2$

$\therefore a+b+c=-2$

Part Ⓑ Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ

Ⓑ **041** 답 ⑤

$0<a<1$일 때, 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프를 모두 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 두 그래프는 직선 $y-6=x+2$, 즉 $y=x+8$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=1$, $q=8$이므로

$$p+q=9$$

Ⓑ **042** 답 ④

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x$를 만족시키므로 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=3^x$의 역함수이다.

즉 $g(x)=\log_3 x$이다.

지수함수 $f(x)=3^x$의 그래프가 두 점 $(a, 2)$, $(b, 5)$를 지나므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(2, a)$, $(5, b)$를 지난다. 즉

$$g(2)=\log_3 2=a,\ g(5)=\log_3 5=b$$

$$\therefore g(30)=\log_3 30=\log_3 2+\log_3 5+1$$
$$=a+b+1$$

Ⓑ **043** 답 31

$y=\log_4(x+2)-\frac{1}{2}$에서 $\quad y+\frac{1}{2}=\log_4(x+2)$

$$x+2=4^{y+\frac{1}{2}} \qquad \therefore x=2\cdot4^y-2$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=2\cdot4^x-2$

$$\therefore g(x)=2\cdot4^x-2$$

이때 $g(2x)=2\cdot4^{2x}-2$, $g(x+1)=2\cdot4^{x+1}-2$이므로

$g(2x)=g(x+1)$에서 $\quad 4^{2x}=4^{x+1}$

$$2x=x+1 \qquad \therefore x=1$$

$g(2\cdot1)=g(2)=2\cdot4^2-2=30$이므로

$$a=1,\ b=30$$

$$\therefore a+b=31$$

Ⓑ **044** 답 40

$y=2\log_2\frac{x}{2}=2(\log_2 x-1)$에서

$$\frac{y}{2}+1=\log_2 x \qquad \therefore x=2^{\frac{y}{2}+1}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=2^{\frac{x}{2}+1}$

$$\therefore g(x)=2^{\frac{x}{2}+1}$$

점 A_2의 y좌표는 2이므로 $2=2\log_2\frac{x}{2}$에서

$$\frac{x}{2}=2 \qquad \therefore x=4$$

$$\therefore A_2(4, 2)$$

점 A_3의 x좌표는 4이므로

$$g(4)=2^{\frac{4}{2}+1}=8$$

$$\therefore A_3(4, 8)$$

점 A_4의 y좌표는 8이므로 $8=2\log_2\frac{x}{2}$에서

$$\frac{x}{2}=16 \qquad \therefore x=32$$

$$\therefore A_4(32, 8)$$

따라서 $a=32$, $b=8$이므로

$$a+b=40$$

Ⓑ **045** 답 ④

진수의 조건에서 $x-1>0$, $2x+6>0$이므로

$$x>1$$

$\log_2(x-1)=\log_4(2x+6)$에서

$$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(2x+6)$$

$$2\log_2(x-1)=\log_2(2x+6)$$

$$\log_2(x-1)^2=\log_2(2x+6)$$

따라서 $(x-1)^2=2x+6$이므로

$(x-1)^2=2x+6$에서
$x^2-2x+1=2x+6$
$\therefore x^2-4x-5=0$

$$x^2-4x-5=0, \qquad (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=5\ (\because x>1)$$

Ⓑ **046** 답 36

$f(a)=\log_a a=1$, $g(a)=\log_b a$이므로

$$f(a)-g(a)=1-\log_b a=\frac{1}{3}$$

$$\log_b a=\frac{2}{3} \qquad \therefore \log_a b=\frac{3}{2}$$

$f(k)=g(216)$에서 $\quad \log_a k=\log_b 216$

이때

$$\log_b 216=\frac{\log_a 216}{\log_a b}=\frac{2}{3}\log_a 6^3=\log_a 36$$

이므로 $\quad \log_a k=\log_a 36$

$$\therefore k=36$$

Ⓑ **047** 답 64

$\log_2 x+3\log_4 x=207-3x$에서

$3\log_4 x=3\log_{2^2} x$
$=\frac{3}{2}\log_2 x$

$$\log_2 x+\frac{3}{2}\log_2 x=3(69-x)$$

$$\frac{5}{2}\log_2 x=3(69-x)$$

$$\therefore 5\log_2 x=6(69-x)$$

x가 자연수이므로 $\log_2 x>0$에서

$x=1$, 즉 $\log_2 x=0$이면
$5\cdot0\neq6(69-1)$
이므로 $\log_2 x>0$

$$69-x>0$$

$$\therefore 1<x<69 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_2 x$는 6의 배수, $69-x$는 5의 배수이어야 하므로

$$x=2^6=64\ (\because ㉠)$$

Ⓑ **048** 답 ⑤

진수의 조건에서 $x>0$

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+5=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-6t+5=0,\quad (t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

따라서 $x=2$ 또는 $x=32$이므로

$\alpha=2,\ \beta=32\ (\because \alpha<\beta)$

$\therefore \beta-\alpha=32-2=30$

$\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=5$ 이므로
$x=2$ 또는 $x=2^5=32$

Ⓑ **049** 답 16

$\log_2 x+3\log_x 2-4=0$에서 $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$이므로

$\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}-4=0$

양변에 $\log_2 x$를 곱하여 정리하면

$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t+3=0,\quad (t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2$ 또는 $x=8$

$\therefore \alpha\beta=16$

단축Key
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2\alpha+\log_2\beta=4$
$\log_2\alpha\beta=4$
$\therefore \alpha\beta=2^4=16$

Ⓑ **050** 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2a+5=(\log_2 b+1)+(\log_2 b+2)$

$\therefore 2a+5=2\log_2 b+3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a+3=(\log_2 b+1)(\log_2 b+2)$

$\therefore a+3=(\log_2 b)^2+3\log_2 b+2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡$\times 2-$㉠을 하면

$2(\log_2 b)^2+4\log_2 b+1=1$

$\log_2 b=t$로 놓으면

$2t^2+4t=0,\quad 2t(t+2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=-2$

따라서 $b=1$ 또는 $b=\dfrac{1}{4}$이고 b는 정수이므로 $b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$2a+5=3,\quad 2a=-2\quad \therefore a=-1$

$\therefore a-b=-2$

Ⓑ **051** 답 11

$\log_3 x\cdot\log_2 y=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}\cdot\dfrac{\log_3 y}{\log_3 2}=\log_2 x\cdot\log_3 y=2$이므로 $\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X+Y=3 \\ XY=2 \end{cases}$

$\therefore X=1,\ Y=2$ 또는 $X=2,\ Y=1$

$Y=3-X$이므로
$XY=X(3-X)$
$=-X^2+3X=2$
즉 $X^2-3X+2=0$에서
$(X-1)(X-2)=0$
$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

$\log_2 x=1$, $\log_3 y=2$에서
$x=2,\ y=9$

$\log_2 x=2$, $\log_3 y=1$에서
$x=4,\ y=3$

즉 $x=2,\ y=9$ 또는 $x=4,\ y=3$이므로

$\alpha=2,\ \beta=9\ (\because \alpha<\beta)$

$\therefore \alpha+\beta=11$

Ⓑ **052** 답 ④

진수의 조건에서 $x+3>0$, $7-x>0$이므로

$-3<x<7 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\log_3(x+3)+\log_3(7-x)>2$에서

$\log_3(x+3)(7-x)>2$

밑이 1보다 크므로

$(x+3)(7-x)>3^2,\quad x^2-4x-12<0$

$(x+2)(x-6)<0$

$\therefore -2<x<6 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $-2<x<6$이므로 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 14이다.

Ⓑ **053** 답 ②

부등식 $\log_3(\log_2 x)\le 2$를 풀면 진수의 조건에서

$\log_2 x>0\quad \therefore x>1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\log_3(\log_2 x)\le 2$에서

$\log_3(\log_2 x)\le\log_3 9$

밑이 1보다 크므로

$\log_2 x\le 9\quad \therefore x\le 2^9 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $1<x\le 2^9$

$\therefore A=\{x\,|\,1<x\le 512\}$

부등식 $\log_2(\log_3 x)\le 2$를 풀면 진수의 조건에서

$\log_3 x>0\quad \therefore x>1 \quad \cdots\cdots ㉢$

$\log_2(\log_3 x)\le 2$에서

$\log_2(\log_3 x)\le\log_2 4$

밑이 1보다 크므로

$\log_3 x\le 4\quad \therefore x\le 3^4 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서 $1<x\le 3^4$

$\therefore B=\{x\,|\,1<x\le 81\}$

따라서 $B\subset A$이므로 옳은 것은 ② $A\cap B=B$이다.

$B\subset A$이므로
$A\cap B=B$
$A\cup B=A$

Ⓑ **054** 답 ③

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a<0)$으로 놓으면 $f(0)=3$이므로

$-3a=3\quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-(x+1)(x-3)$
$=-x^2+2x+3$

또 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x+3=2x-1$에서

$x^2-4=0,\quad (x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

한편 $\log_2 f(x)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>0$에서

$\log_2 f(x)-\log_2(2x-1)>0$

$\log_2 f(x)>\log_2(2x-1)$

밑이 1보다 크므로

$f(x)>2x-1$

$\therefore -2<x<2$ ······ ㉠

다큐 Board: $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x-1$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위

이때 진수의 조건에서 $2x-1>0$, $f(x)>0$이므로

$\frac{1}{2}<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<x<2$

Ⓑ 055 답 ④

진수의 조건에서 $x>0$

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+4<2\log_2 x-4$에서

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+8<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-6t+8<0$

$(t-2)(t-4)<0$

$\therefore 2<t<4$

즉 $2<\log_2 x<4$이고 밑이 1보다 크므로

$4<x<16$

따라서 구하는 정수 x는 5, 6, 7, ⋯, 15의 11개이다.

Ⓑ 056 답 81

함수 $y=k\log_3 x$의 그래프가 점 (9, 1)을 지나므로

$1=k\log_3 9,\quad 1=2k \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\log_3 x$

진수의 조건에서 $x>0$

$f(g(x))=f(x^2)=\frac{1}{2}\log_3 x^2=\log_3 x\ (\because x>0)$

이고

$g(f(x))=g\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)=\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2=\frac{1}{4}(\log_3 x)^2$

이므로 $f(g(x))>g(f(x))$에서

$\log_3 x>\frac{1}{4}(\log_3 x)^2$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$t>\frac{1}{4}t^2,\qquad \frac{1}{4}t(t-4)<0$

$\therefore 0<t<4$

즉 $0<\log_3 x<4$이고 밑이 1보다 크므로

$1<x<81$

따라서 $a=1$, $b=81$이므로

$ab=81$

Ⓑ 057 답 ③

$T=20$일 때 화학반응율은 R_a이므로

$\log\frac{R_a}{K}=-\frac{200}{20}=-10$

$\frac{R_a}{K}=10^{-10} \qquad \therefore R_a=\frac{K}{10^{10}}$

$T=5$일 때 화학반응율은 R_b이므로

$\log\frac{R_b}{K}=-\frac{200}{5}=-40$

$\frac{R_b}{K}=10^{-40} \qquad \therefore R_b=\frac{K}{10^{40}}$

$\therefore \frac{R_a}{R_b}=\frac{\frac{K}{10^{10}}}{\frac{K}{10^{40}}}=10^{30}$

Ⓑ 058 답 ⑤

속도가 200 (km/시)인 토네이도의 이동거리가 100 km이므로

$200=150\log 100+K$

$200=150\cdot 2+K \qquad \therefore K=-100$

속도가 150 (km/시)인 토네이도의 이동거리를 x km라 하면

$150=150\log x-100,\qquad \log x=\frac{5}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{5}{3}}=10\sqrt[3]{100}$

다큐 Board: $150=150\log x-100$에서
$150\log x=250$
$\therefore \log x=\frac{250}{150}=\frac{5}{3}$

Ⓑ 059 답 ③

2013년 초 희귀광물의 매장량을 a라 하면 2013년 초부터 t년 동안 채굴한 후의 희귀광물의 매장량은

$a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{3}}$

m년 동안 채굴한 후의 희귀광물의 매장량이 2013년 초 매장량의 8 % 이하가 된다고 하면

$a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{m}{3}}\le\frac{8}{100}a$

$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{m}{3}}\le\frac{8}{100}\ (\because a>0)$

양변에 상용로그를 취하면

$\frac{m}{3}\log\frac{3}{4}\le\log\frac{8}{100}$

$\frac{m}{3}(\log 3-2\log 2)\le 3\log 2-2$

$\therefore m\ge\frac{3(3\log 2-2)}{\log 3-2\log 2}=\frac{3(3\times 0.3-2)}{0.48-2\times 0.3}=27.5$

따라서 희귀광물의 매장량이 처음으로 2013년 초 매장량의 8 % 이하가 되는 해는 채굴을 시작한 지 28년이 지난 후이고 중간에 2년 동안의 시설 보강공사 기간을 더하면 30년 이후가 된다.

$\therefore n=30$

I. 지수함수와 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 미분

Ⓑ 060 답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-k}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x-k}\right)^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{k}{x-k}\right)^{\frac{x-k}{k}}\right\}^{\frac{2kx}{x-k}}$$

$$=e^{2k}$$

이므로 $e^{2k}=e^3$, $2k=3$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

$$\frac{x}{x-k}=\frac{x-k+k}{x-k}=1+\frac{k}{x-k}$$

Ⓑ 061 답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)^{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^2=e^2$$

Ⓑ 062 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to0}(1-x)^{-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^2=e^2$

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄷ. $-6x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓑ 063 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{-3x}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

Ⓑ 064 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}x^2\{\ln(x^2+2)-2\ln x\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\{\ln(x^2+2)-\ln x^2\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}}\cdot2$$

$$=1\cdot2=2$$

Ⓑ 065 답 24

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{2x}}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}=6\text{에서}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=1\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=6$$

$2x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{2t}\cdot4=6\cdot4=24$$

Ⓑ 066 답 ①

점 P(a, b)는 곡선 $y=\log_3(4x+1)$ 위의 점이므로

$b=\log_3(4a+1)$에서

$$S(a)=\pi\{\log_3(4a+1)\}^2$$

$$T(a)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{BP}}=\frac{1}{2}a\log_3(4a+1)$$

$$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{S(a)}{T(a)}=\lim_{a\to0+}\frac{\pi\{\log_3(4a+1)\}^2}{\frac{1}{2}a\log_3(4a+1)}$$

$$=2\pi\lim_{a\to0+}\frac{\log_3(1+4a)}{a}$$

$$=2\pi\lim_{a\to0+}\frac{\log_3(1+4a)}{4a}\cdot4$$

$$=\frac{8\pi}{\ln3}$$

Ⓑ 067 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x-3}{4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{4x}+\frac{e^{2x}-1}{4x}+\frac{e^x-1}{4x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{4}+\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

Ⓑ 068 답 2

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}\cdot(x+1)=1\cdot2=2$$

$x^2-1=t$로 놓으면
$x\longrightarrow1$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

Ⓑ 069 답 ③

$$\lim_{x\to2}\frac{3^{x-1}-3}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{3(3^{x-2}-1)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{3}{x}$$

$$=\ln3\cdot\frac{3}{2}$$

$$=\ln3^{\frac{3}{2}}$$

$x-2=t$로 놓으면
$x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{3^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{t}=\ln3$$

따라서 $\ln a=\ln 3^{\frac{3}{2}}$이므로

$$a=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$$

Ⓑ 070 답 ④

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x+b}{\ln(x+1)}=2$에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(a^x+b)=1+b=0$이므로

$$b=-1$$

또 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}\cdot\dfrac{a^x-1}{x}$

$$=1\cdot\ln a=\ln a$$

이므로 $\ln a=2$ $\quad\therefore a=e^2$

$$\therefore a-b=e^2+1$$

Ⓑ 071 답 ③

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\dfrac{f(x)}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=2$$

에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2+8x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}\cdot(x+8)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot8=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}}=\frac{1}{4}$$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{2x}{f(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(x)}=1$$

에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{f(x)}$$

$$=\ln2\cdot\frac{1}{2}=\ln\sqrt{2}$$

ㄷ. [반례] $f(x)=x^3$이면 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$이지만

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{f(x)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3}-1}{x^3}=1$$

이므로 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x^3}$이 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓑ 072 답 ②

$\mathrm{A}(k,\ e^{2k})$, $\mathrm{B}(k,\ \ln(4k+1))$, $\mathrm{C}(k,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ e^{2k})$

이므로

$$S(k)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}k(e^{2k}-1)$$

$$T(k)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}k\ln(4k+1)$$

$$\therefore \lim_{k\to0+}\frac{S(k)+T(k)}{3k^2}$$

$$=\lim_{k\to0+}\frac{\frac{1}{2}k(e^{2k}-1)+\frac{1}{2}k\ln(4k+1)}{3k^2}$$

$$=\lim_{k\to0+}\frac{e^{2k}-1}{6k}+\lim_{k\to0+}\frac{\ln(4k+1)}{6k}$$

$$=\lim_{k\to0+}\frac{e^{2k}-1}{2k}\cdot\frac{1}{3}+\lim_{k\to0+}\frac{\ln(4k+1)}{4k}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Ⓑ 073 답 ③

ㄱ. $x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{2^x-1}{e^x-1}$이므로

$$f(\ln2)=\frac{2^{\ln2}-1}{e^{\ln2}-1}=2^{\ln2}-1$$

ㄴ. $e>2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{e^x-1}=0$$

ㄷ. $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1}=\ln2\cdot1=\ln2$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓑ 074 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$을 만족시켜야 하므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a+2x)}{3x}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}\ln(a+2x)=0$이므로 $\ln a=0$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{3}$$

Ⓑ 075 답 ⑤

$f'(x)=2e^x+(2x-a)e^x=(2x-a+2)e^x$

이므로 $f'(1)=(4-a)e$

즉 $(4-a)e=-\dfrac{1}{2}e$이므로

$$4-a=-\frac{1}{2} \qquad \therefore a=\frac{9}{2}$$

Ⓑ **076** 답 ④

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h^2+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h^2+2h)-f(1)}{h^2+2h}\cdot\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h^2+2h)-f(1)}{h^2+2h}\cdot(h+2)=2f'(1)$$

이때 $f(x)=2^{x+1}=2\cdot2^x$에서

$$f'(x)=2\cdot2^x\ln2$$

이므로 $\quad 2f'(1)=2\cdot2\cdot2\ln2=8\ln2$

Ⓑ **077** 답 ③

$f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x=(x^2+4x+2)e^x$

$e^x>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x^2+4x+2=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=2$

$$\therefore f(\alpha)f(\beta)=(\alpha^2+2\alpha)e^\alpha\times(\beta^2+2\beta)e^\beta$$
$$=(-2\alpha-2)(-2\beta-2)e^{\alpha+\beta}$$
$$=4(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta}$$
$$=4(2-4+1)e^{-4}=-\frac{4}{e^4}$$

$\alpha^2+4\alpha+2=0$에서
$\alpha^2+2\alpha=-2\alpha-2$
$\beta^2+4\beta+2=0$에서
$\beta^2+2\beta=-2\beta-2$

Ⓑ **078** 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1-}ae^x=\lim_{x\to1+}(x+b)=f(1)$$

$ae=1+b \qquad \therefore b=ae-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{ae^{1+h}-ae}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{ae(e^h-1)}{h}=ae$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h+b)-ae}{h}=1$$

에서 $\quad ae=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{e}$

$a=\frac{1}{e}$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=0$

$\therefore ab=0$

다른풀이 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}ae^x & (x<1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$에서 $\quad \lim_{x\to1-}ae^x=\lim_{x\to1+}1$

$ae=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{e}$

Ⓑ **079** 답 4

$f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)=2f'(1)$$

이때 $f(x)=(x^2+x)\ln x$에서

$$f'(x)=(2x+1)\ln x+(x^2+x)\cdot\frac{1}{x}$$
$$=(2x+1)\ln x+x+1$$

이므로 $\quad 2f'(1)=2(1+1)=4$

Ⓑ **080** 답 ④

$f(x)=x\log_3 4x+5=x(\log_3 4+\log_3 x)+5$이므로

$a>0,\ a\neq1$이고
$M>0,\ N>0$일 때
$\log_a MN$
$=\log_a M+\log_a N$

$$f'(x)=\log_3 4+\log_3 x+x\cdot\frac{1}{x\ln3}$$
$$=\log_3 4+\log_3 x+\frac{1}{\ln3}$$
$$=\log_3 4+\log_3 x+\log_3 e=\log_3 4ex$$

따라서 $\log_3 4ex=\log_3 ax$이므로 $\quad a=4e$

Ⓑ **081** 답 2

$f'(x)=\frac{2}{x}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n+1)f'(n+2)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(k+1)(k+2)}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$
(단, $A\neq B$)

Ⓑ **082** 답 ①

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+4}{x-2}=-2$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to2}\{f(x)+4\}=0$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2}\{f(x)+4\}=f(2)+4=0$

$\therefore f(2)=-4$

따라서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

이므로 $\quad f'(2)=-2$

$y=f(x)\ln x$에서 $y'=f'(x)\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}$이므로

$x=2$에서의 미분계수는

$$f'(2)\ln2+\frac{1}{2}f(2)=-2\ln2-2$$
$$=-2(\ln2+1)$$

04 삼각함수의 뜻과 그래프

Ⓑ 083 답 ⑤

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로 $\quad r^2\theta=2S$

이 부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면 $l=r\theta$이므로 부채꼴의 둘레의 길이는 $\quad 2r+r\theta$

이때 $2r>0$, $r\theta>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

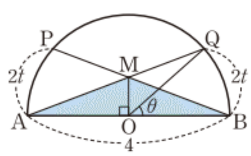
$$2r+r\theta\geq 2\sqrt{2r\cdot r\theta}=2\sqrt{2r^2\theta}=2\sqrt{2\cdot 2S}=4\sqrt{S}$$

(단, 등호는 $\theta=2$일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{S}$이다.

> 산술평균과 기하평균의 관계
> $a>0$, $b>0$일 때
> $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$
> (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

Ⓑ 084 답 ⑤



오른쪽 그림에서 지름 AB의 중점을 O라 하면 삼각형 ABM은 이등변삼각형이므로 $\quad \angle\text{MOA}=90^\circ$

> 점 O는 반원의 중심이다.

$\angle\text{BOQ}=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{\text{BQ}}=2t$이므로

$$2t=2\theta \qquad \therefore\ \theta=t$$

원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$$\angle\text{MAB}=\frac{t}{2}$$

> 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$배이다.

직각삼각형 MAO에서

$$\overline{\text{MO}}=\overline{\text{AO}}\tan\frac{t}{2}=2\tan\frac{t}{2}$$

따라서 삼각형 ABM의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\tan\frac{t}{2}=4\tan\frac{t}{2}$$

Ⓑ 085 답 ②

$\angle\text{AOB}=\alpha$, $\angle\text{COD}=\beta$라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\alpha=50\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\alpha=18\alpha$$

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\beta=50\beta$$

$$S_4=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\beta=18\beta$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_4}+\frac{S_3}{S_2}=\frac{50\alpha}{18\beta}+\frac{50\beta}{18\alpha}=\frac{25}{9}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

이때 $\frac{\alpha}{\beta}>0$, $\frac{\beta}{\alpha}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{25}{9}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\geq\frac{25}{9}\cdot 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{50}{9}$$

(단, 등호는 $\alpha=\beta$일 때 성립)

따라서 $\frac{S_1}{S_4}+\frac{S_3}{S_2}$의 최솟값은 $\frac{50}{9}$이다.

Ⓑ 086 답 ②

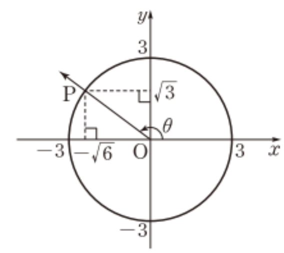
원점 O와 점 P$(3,\ -4)$에 대하여

$$\overline{\text{OP}}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

따라서 $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$$\cos\theta\sin\theta=-\frac{12}{25}$$

Ⓑ 087 답 ④



θ가 제2사분면의 각이고 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 그리면 각 θ의 동경과 만나는 점 P는

$$\text{P}(-\sqrt{6},\ \sqrt{3})$$

따라서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cot\theta=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$이므로

$$\cos\theta\cot\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

다른풀이 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$$\cos\theta\cot\theta=\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ⓑ 088 답 ②

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}, \qquad 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

$$\therefore\ \tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=-\frac{8}{3}$$

Ⓑ 089 답 ③

$1+2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$이므로

$$1+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

$$\therefore \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=0$$

Ⓑ 090 답 ③

이차방정식 $x^2+x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta-\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2\sin\theta=-1$ $\quad\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=2\sin\theta$

또 $\sin^2\theta-\cos^2\theta=k$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)\times(\sin\theta-\cos\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$$k=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=2\sin^2\theta-1$$
$$=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$$

Ⓑ 091 답 8

$5\cos\theta=\sec\theta$에서 $\quad\frac{5}{\sec\theta}=\sec\theta$

$\therefore \sec^2\theta=5$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $\quad\tan^2\theta=4$

$\therefore \tan\theta=2\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

이때

$$1+\tan\theta+\tan^2\theta+\cdots+\tan^n\theta$$
$$=1+2+2^2+\cdots+2^n$$
$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}$$
$$=2^{n+1}-1$$

이므로 $2^{n+1}-1>500$에서

$2^{n+1}>501$

$2^8=256$, $2^9=512$

따라서 위의 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

Ⓑ 092 답 ③

$\sin 210^\circ=\sin(270^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ$,

$\sin 230^\circ=\sin(270^\circ-40^\circ)=-\cos 40^\circ$,

$\sin 250^\circ=\sin(270^\circ-20^\circ)=-\cos 20^\circ$이므로

(주어진 식)

$=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ-\cos 60^\circ\cos 40^\circ\cos 20^\circ$

$=0$

Ⓑ 093 답 135

θ가 제2사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$이므로

θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

따라서

$$a=\frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\sin(\pi-\theta)}$$

$-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

$$=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{2}=\frac{27}{8}$$

이므로 $\quad 40a=40\cdot\frac{27}{8}=135$

Ⓑ 094 답 ②

$\sin x-\cos x=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{9}$$

$1-2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$, $\quad 2\sin x\cos x=\frac{8}{9}$

$\therefore \sin x\cos x=\frac{4}{9}$

$$\therefore \tan(\pi+x)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\tan x+\cot x$$
$$=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{9}{4}$$

Ⓑ 095 답 ⑤

$\sin A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos B$에서

$\frac{\pi}{2}-A=B$ $\quad\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$

$A+B+C=\pi$이므로 $\quad C=\frac{\pi}{2}$

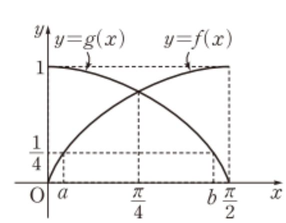
$$\therefore \tan\left(\frac{5}{6}\pi-C\right)=\tan\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

Ⓑ 096 답 ③

$f(a)=g(b)=\frac{1}{4}$에서

$\sin a=\cos b=\frac{1}{4}$

이때 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는



직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$이다.

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore a+b=\frac{\pi}{2}$

Ⓑ 097 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로 $|a|=3$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$

이때 주기는 $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로

$$\frac{2\pi}{|b|}=\pi \qquad \therefore b=2\ (\because b>0)$$

또 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+c\right)=3\sin(\pi+c)$

$$=-3\sin c=-\frac{3}{2}$$

에서 $\sin c=\frac{1}{2}$ $\therefore c=\frac{\pi}{6}\left(\because -\frac{\pi}{2}<c<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ⓑ 098 답 ②

주기가 k인 함수 $f(x)$에 대하여 $kn=2$를 만족시키는 자연수 n이 존재하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

① $f(x)=\sin\pi x$의 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

$$2\cdot1=2$$

② $f(x)=\cos\frac{4}{3}\pi x$의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi}=\frac{3}{2}$이므로

$\frac{3}{2}n=2$를 만족시키는 자연수 n이 존재하지 않는다.

③ $f(x)=\sin3\pi x$의 주기가 $\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$이므로

$$\frac{2}{3}\cdot3=2$$

④ $f(x)=\cos4\pi x$의 주기가 $\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot4=2$$

⑤ $f(x)=\sin5\pi x$의 주기가 $\frac{2\pi}{5\pi}=\frac{2}{5}$이므로

$$\frac{2}{5}\cdot5=2$$

따라서 ②를 제외한 함수는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다.

Ⓑ 099 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프는 조건 (가)에 의하여 y축에 대하여 대칭이고, 조건 (나)에 의하여 주기가 1이다.

① 함수 $y=\sin\frac{1}{\pi}x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 주기는 $2\pi^2$이다.

② 함수 $y=\left|\cos\frac{1}{\pi}x\right|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 주기는 π^2이다.

함수 $y=|\cos ax|$의 주기는 $y=\cos ax$의 주기의 $\frac{1}{2}$이다.

③ 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 주기는 4이다.

④ 함수 $y=\cos2\pi x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 주기는 1이다.

⑤ 함수 $y=\tan\pi x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 주기는 1이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 것은 ④이다.

보충학습

$y=|f(x)|$의 그래프

$y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

(ii) $y\geq0$인 부분은 그대로 둔다.

(iii) $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한다.

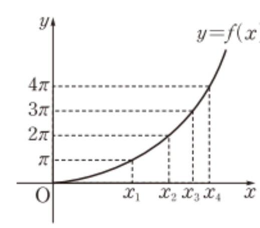
Ⓑ 100 답 ④

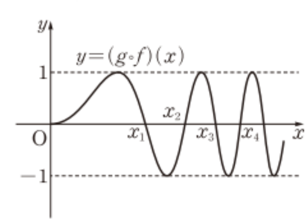
$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sin f(x)$

$\sin f(x)=0$에서 $f(x)=n\pi$ (n은 음이 아닌 정수)

$n=0, 1, 2, 3, \cdots$일 때, 방정식 $f(x)=n\pi$의 근을 차례대로 $0, x_1, x_2, x_3, \cdots$이라 하면 $x=0, x_1, x_2, x_3, \cdots$일 때, $\sin f(x)=0$이고 $-1\leq\sin f(x)\leq1$이므로 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.

$f(0)=0$, $f(x_1)=\pi$, $f(x_2)=2\pi$, $f(x_3)=3\pi$, $\cdots$





$y=f(x)$의 그래프에서 $x_1-0>x_2-x_1>x_3-x_2>x_4-x_3>\cdots$이므로 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형은 ④와 같다.

Ⓑ 101 답 9

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$이므로

$$\begin{aligned} y&=\sin^2x-3\cos^2x+4\sin x+5\\ &=\sin^2x-3(1-\sin^2x)+4\sin x+5\\ &=4\sin^2x+4\sin x+2 \end{aligned}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\leq x<2\pi$에서 $-1\leq t\leq1$이고

$$y=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1$$

$$\begin{aligned} y&=4t^2+4t+2\\ &=4\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)+1\\ &=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1 \end{aligned}$$

따라서 $f(t)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+1$이라 하면 오른쪽 그림에서

$M=f(1)=10$

$m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

$\therefore M-m=10-1=9$

Ⓑ **102** 답 4

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-|3t-k|+5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$k>0$이므로 ㉠은 $t=-1$일 때, 최솟값을 갖는다.

즉 $-|-3-k|+5=-2$이므로

$$|-3-k|=7, \qquad 3+k=7$$

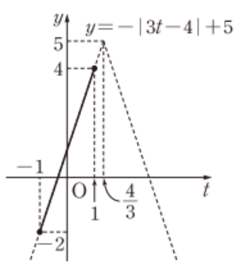
$k>0$이므로
$-3-k<0$
$\therefore |-3-k|=3+k$

$$\therefore k=4$$

$$\therefore y=-|3t-4|+5$$

오른쪽 그림에서 $t=1$일 때, 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$$-|3\cdot 1-4|+5=4$$



Ⓑ **103** 답 ③

$$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{2-\sin x}{\sin x+3}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{2-t}{t+3}=\frac{5}{t+3}-1$$

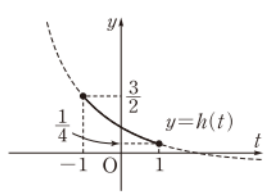
따라서 $h(t)=\dfrac{5}{t+3}-1$이라 하면

오른쪽 그림에서

$$M=h(-1)=\frac{3}{2}$$

$$m=h(1)=\frac{1}{4}$$

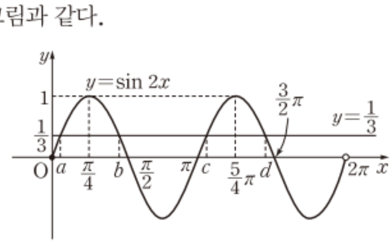
$$\therefore M+m=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$



Ⓑ **104** 답 ②

함수 $y=\sin 2x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{3}$은 다음 그림과 같다.

함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$



방정식 $\sin 2x=\dfrac{1}{3}$의 네 근을 $a, b, c, d\ (a<b<c<d)$라 하면

$$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{4},\ \frac{c+d}{2}=\frac{5}{4}\pi$$

이므로 $\quad a+b=\dfrac{\pi}{2},\ c+d=\dfrac{5}{2}\pi$

$$\therefore a+b+c+d=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi=3\pi$$

Ⓑ **105** 답 ①

$x-\dfrac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\dfrac{\pi}{6}\le t<\dfrac{11}{6}\pi$이고 주어진 방정식은

$$\cos t=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore t=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } t=\frac{4}{3}\pi$$

즉 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{3}\pi$이므로

$$\alpha=\frac{5}{6}\pi,\ \beta=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \alpha-\beta=\frac{5}{6}\pi-\frac{3}{2}\pi=-\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ⓑ **106** 답 ④

$\tan^2 x-5\tan x+1=0$에서 $\tan x=t$로 놓으면

$$t^2-5t+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면

$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=1,\ D=(-5)^2-4>0$$

이므로 ㉠은 $\alpha>0$, $\beta>0$인 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$0<A<\dfrac{\pi}{2}$, $0<B<\dfrac{\pi}{2}$인 A, B에 대하여 $\tan A=\alpha$, $\tan B=\beta$라 하면 함수 $y=\tan x$는 주기가 π이므로 주어진 방정식의 근은

$$x=A,\ B,\ A+\pi,\ B+\pi$$

한편 $\tan A\tan B=1$이므로

$$\tan A=\cot B=\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$

즉 $A=\dfrac{\pi}{2}-B$이므로 $\quad A+B=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 네 근의 합은

$$A+B+(A+\pi)+(B+\pi)=2(A+B)+2\pi=3\pi$$

보충학습

> a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 하면
> ① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> ② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근을 갖는다.
> ③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

Ⓑ **107** 답 4

$\pi\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\pi\le t\le\pi$이고 주어진 방정식은

$-1\le\sin x\le 1$이므로
$-\pi\le\pi\sin x\le\pi$

$$\cos t=0$$

$$\therefore t=-\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t=\frac{\pi}{2}$$

(i) $\pi\sin x=-\dfrac{\pi}{2}$일 때, $\sin x=-\dfrac{1}{2}$이므로

$$x=\frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x=\frac{11}{6}\pi$$

Part Ⓑ Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ

(ⅱ) $\pi\sin x=\frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x=\frac{1}{2}$이므로

$$x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $\cos(\pi\sin x)=0$의 근은

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

이므로 모든 근의 합은

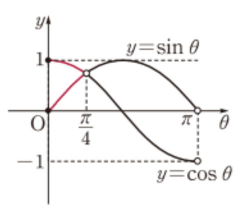
$$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=a\pi$$

$$4\pi=a\pi \qquad \therefore a=4$$

Ⓑ 108 답 ⑤

(ⅰ) $0\le\theta<\pi$일 때, $\sin\theta\ge0$

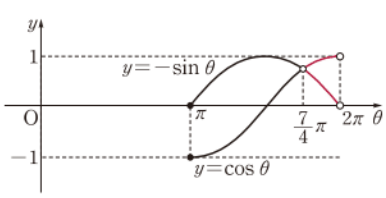
따라서 부등식 $\sin\theta<\cos\theta$의 해는 $y=\sin\theta$의 그래프가 $y=\cos\theta$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 θ의 값의 범위이므로 다음 그림에서 $0\le\theta<\frac{\pi}{4}$이다.



(ⅱ) $\pi\le\theta<2\pi$일 때, $\sin\theta\le0$

따라서 부등식 $-\sin\theta<\cos\theta$의 해는 $y=-\sin\theta$의 그래프가 $y=\cos\theta$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 θ의 값의 범위이므로 다음 그림에서

$\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$이다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 부등식 $|\sin\theta|<\cos\theta$의 해는

$$0\le\theta<\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$$

Ⓑ 109 답 ④

이차방정식 $x^2-4x\sin\theta+6\cos\theta=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4\sin\theta,\ \alpha\beta=6\cos\theta$$

두 근이 모두 양수이므로

$$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$$

즉 $4\sin\theta>0$, $6\cos\theta>0$에서

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

다큐 Board

$4\sin\theta>0$에서
$\sin\theta>0$
$\therefore 0<\theta<\pi$
$6\cos\theta>0$에서
$\cos\theta>0$
$\therefore 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$
또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

x의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$에서는 판별식 D 대신 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$를 이용할 수 있다.

또한 두 근이 모두 실수이므로 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, $D\ge0$이어야 한다. 즉

$$\frac{D}{4}=4\sin^2\theta-6\cos\theta\ge0$$

$$4(1-\cos^2\theta)-6\cos\theta\ge0$$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$$4(1-t^2)-6t\ge0,\qquad 2t^2+3t-2\le0$$

$$(t+2)(2t-1)\le0$$

$-1\le t\le1$에서 $t+2>0$이므로

$$2t-1\le0 \qquad \therefore t\le\frac{1}{2}$$

즉 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$을 만족시키는 θ의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{\pi}{2}$이므로

$$a+b=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$$

Ⅱ. 삼각함수

05 삼각함수의 미분

Ⓑ 110 답 ④

$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15° = \cos(45° - 30°)$

$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \sin 15° + \cos 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ⓑ 111 답 ⑤

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$

$\left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{6}$

Ⓑ 112 답 ②

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$이므로

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$\left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\beta = \frac{4}{5}$이므로

$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$

$\left(\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$

$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$= -\frac{24}{25}$

다큐 Board

$\overline{CD} = 4$, $\overline{CP} : \overline{PD} = 1:3$이므로

$\overline{CP} = \frac{1}{4}\overline{CD} = 1$

$\overline{AD} = 4$, $\overline{AQ} : \overline{DQ} = 3:1$이므로

$\overline{AD} : \overline{DQ} = 2:1$

$\therefore \overline{DQ} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 2$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

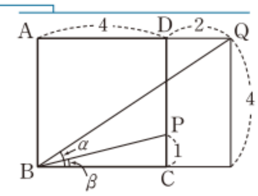
함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여

$f(a) = b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a$

(단, a, b는 상수)

Ⓑ 113 답 25

오른쪽 그림에서



$\angle QBC = \alpha$, $\angle PBC = \beta$라 하면 $\theta = \alpha - \beta$

$\overline{BQ} = \sqrt{6^2+4^2} = 2\sqrt{13}$이므로

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$,

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\overline{BP} = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$이므로

$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\therefore \cos\theta = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$

$= \frac{14}{\sqrt{221}}$

따라서 $\cos^2\theta = \frac{196}{221}$이므로 $p = 221$, $q = 196$

$\therefore p - q = 25$

Ⓑ 114 답 ②

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha$, $g\left(\frac{1}{3}\right) = \beta$라 하면

$f(\alpha) = \frac{1}{2}$, $f(\beta) = \frac{1}{3}$

즉 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = \frac{1}{3}$이므로

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$

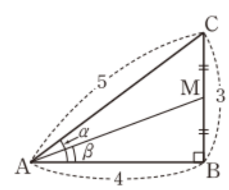
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \alpha + \beta < \pi$

따라서 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$이므로

$g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

Ⓑ 115 답 53

오른쪽 그림에서 $\angle CAB = \alpha$, $\angle MAB = \beta$라 하면



$\theta = \alpha - \beta$

이때 $\tan\alpha = \frac{3}{4}$,

$\tan\beta = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$이므로

$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{8}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{12}{41}$

따라서 $p = 41$, $q = 12$이므로 $p + q = 53$

Ⓑ 116 답 ③

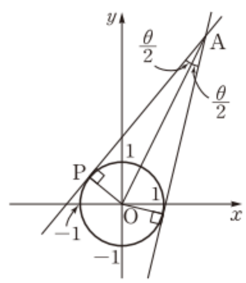
$\angle APB=\alpha$, $\angle DPC=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{3}{4}$, $\tan\beta=\frac{3}{2}$

$$\therefore \tan\theta=\tan(\pi-\alpha-\beta)$$
$$=-\tan(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=-\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}}$$
$$=18$$

Ⓑ 117 답 ③

오른쪽 그림과 같이 한 접점을



P라 하면 $\angle OAP=\frac{\theta}{2}$이고

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$
$=\sqrt{20-1}=\sqrt{19}$

이므로

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{19}}=\frac{\sqrt{19}}{19}$$
$$\therefore \tan\theta=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{\frac{2\sqrt{19}}{19}}{1-\frac{1}{19}}=\frac{\sqrt{19}}{9}$$

Ⓑ 118 답 ②

직선 $l: mx-y=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선 l'의 방정식은

$mx+y=0$

두 직선 l, l'이 x축의 양의 부분과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=m$, $\tan\beta=-m$

$$\therefore |\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{m-(-m)}{1+m\cdot(-m)}\right|$$
$$=\left|\frac{2m}{1-m^2}\right|$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\left|\frac{2m}{1-m^2}\right|=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

(ⅰ) $\frac{2m}{1-m^2}=1$일 때,

$m^2+2m-1=0$ $\quad\therefore m=-1\pm\sqrt{2}$

$m>0$이므로

$m=-1+\sqrt{2}$

(ⅱ) $\frac{2m}{1-m^2}=-1$일 때,

$m^2-2m-1=0$ $\quad\therefore m=1\pm\sqrt{2}$

$m>0$이므로 $\quad m=1+\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 양수 m의 값의 합은

$(-1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

Ⓑ 119 답 ⑤

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$
$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9},\quad 1-\sin 2\theta=\frac{1}{9}$$
$$\therefore \sin 2\theta=\frac{8}{9}$$

Ⓑ 120 답 ③

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\sin 2\theta$$
$$=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Ⓑ 121 답 ④

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로 $\quad\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

$$\therefore \tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\frac{1}{\cos^2\theta}-1$$
$$=\frac{25}{9}-1=\frac{16}{9}$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\quad\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$=\frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=\frac{24}{7}$$

Ⓑ 122 답 ②

$\cos 2x+3\sin x-2=0$에서

$1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$
$=1-2\sin^2 x$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$0\le x<2\pi$이므로

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $\quad x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\sin x=1$에서 $\quad x=\frac{\pi}{2}$

따라서 방정식의 모든 근의 합은

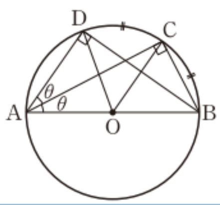
$$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

Ⓑ 123 답 336

선분 AC, AD를 그으면

두 삼각형 ABC, ABD는

$\angle ACB=\angle ADB=90°$인 직각삼각형이다.



$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$이므로

$\angle BAC=\angle CAD=\theta$라 하자.

한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

삼각형 ABC에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{2}{5}$$

이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ l=\overline{BD}&=\overline{AB}\sin 2\theta\\&=5\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\&=5\cdot 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}\\&=\frac{4\sqrt{21}}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore\ 25l^2=25\cdot\left(\frac{4\sqrt{21}}{5}\right)^2=336$$

Ⓑ 124 답 ②

$\angle BAH=\theta$라 하면

$\quad\angle CAH=2\theta$

$\overline{AH}=6$, $\overline{BH}=2$이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\frac{1}{3}$$

따라서

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

이므로

$$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 2\theta=6\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{9}{2}\right)\cdot 6=\frac{39}{2}$$

Ⓑ 125 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{3x+\sin x}{2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{3+\frac{\sin x}{x}}{2\cdot\frac{\sin x}{x}}=\frac{3+1}{2}=2$$

Ⓑ 126 답 4

$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\ln(x+10-b)}=5$에서 $x\longrightarrow0$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to0}\ln(x+10-b)=0$에서

$\quad\ln(10-b)=0,\qquad 10-b=1$

$\quad\therefore\ b=9$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\ln(x+10-b)}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\ln(x+1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{ax}{\ln(x+1)}\\&=1\cdot a=a\end{aligned}$$

즉 $a=5$이므로 $\qquad b-a=4$

보충학습

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ (k는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\qquad\lim_{x\to a}f(x)=0$

(2) $k\neq0$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\qquad\lim_{x\to a}g(x)=0$

Ⓑ 127 답 16

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(10x)-f(\tan 2x)}{3x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(10x)-f(0)}{3x}-\frac{f(\tan 2x)-f(0)}{3x}\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(10x)-f(0)}{10x}\cdot\frac{10}{3}\right.\\&\qquad\left.-\frac{f(\tan 2x)-f(0)}{\tan 2x}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right\}\\&=f'(0)\cdot\frac{10}{3}-f'(0)\cdot1\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{8}{3}f'(0)=\frac{8}{3}\cdot6=16\end{aligned}$$

Ⓑ 128 답 3

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 연속이려면

$\quad\lim_{x\to\pi}f(x)=f(\pi)$

$\quad\therefore\ \lim_{x\to\pi}\frac{a+2\cos x}{(x-\pi)^2}=b\qquad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가
(i) $x=a$에서 정의되고
(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하며
(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$
일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

$x\longrightarrow\pi$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

Part Ⓑ Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ

즉 $\lim_{x\to\pi}(a+2\cos x)=0$이므로

$a-2=0 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2+2\cos x}{(x-\pi)^2}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2(1+\cos x)}{(x-\pi)^2}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2(1-\cos^2 x)}{(x-\pi)^2(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 x}{(x-\pi)^2(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\left\{\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right\}^2\cdot\frac{2}{1-\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{2}{2}=1$$

즉 $b=1$이므로 $\quad a+b=3$

다른풀이 $x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$b=\lim_{t\to0}\frac{2+2\cos(\pi+t)}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2(1-\cos t)}{t^2}\cdot\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2}{1+\cos t}\cdot\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$
$$=\frac{2}{2}\cdot1=1$$

다큐 Board

$\sin x=\sin(\pi-x)$이므로
$\sin x=-\sin(x-\pi)$
$\therefore \sin^2 x=\sin^2(x-\pi)$

$x-\pi=t$로 놓으면
$$\lim_{x\to\pi}\left\{\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right\}^2$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$
$$=1$$

Ⓑ 129 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=-1$

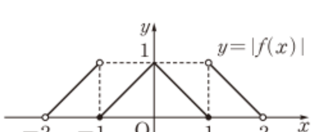
$\lim_{x\to a}f(x)=L$
$\Longleftrightarrow \lim_{x\to a+}f(x)$
$=\lim_{x\to a-}f(x)=L$

ㄴ. 주어진 그래프에서 $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$이고 $-x=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(-x)=\lim_{t\to-1-}f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+}\{f(x)-f(-x)\}$
$=\lim_{x\to1+}f(x)-\lim_{x\to1+}f(-x)$
$=-1-1$
$=-2$

ㄷ.



위의 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $|f(x)|\sin\pi x$가 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서

$|f(-1)|\sin(-\pi)=0\cdot0=0$,
$\lim_{x\to-1+}|f(x)|\sin\pi x=0\cdot0=0$,
$\lim_{x\to-1-}|f(x)|\sin\pi x=1\cdot0=0$

따라서 함수 $|f(x)|\sin\pi x$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $x=1$에서

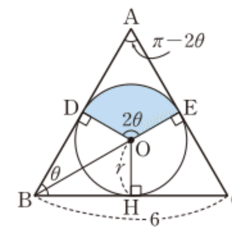
$|f(1)|\sin\pi=0\cdot0=0$,
$\lim_{x\to1+}|f(x)|\sin\pi x=1\cdot0=0$,
$\lim_{x\to1-}|f(x)|\sin\pi x=0\cdot0=0$

따라서 함수 $|f(x)|\sin\pi x$는 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $|f(x)|\sin\pi x$는 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

Ⓑ 130 답 ⑤



삼각형 ABC에서

$\angle BAC=\pi-2\theta$

$\angle ADO=\angle AEO=\frac{\pi}{2}$

이므로 사각형 ADOE에서

$\angle DOE=2\theta$

한편 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{OH}}{\overline{BH}}=\frac{r}{3}$$

$\angle OBH=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{\theta}{2}$

$\therefore r=3\tan\frac{\theta}{2}$

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}r^2\cdot2\theta=9\tan^2\frac{\theta}{2}\cdot\theta$이므로

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 넓이
➜ $\frac{1}{2}r^2\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{9\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}9\cdot\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$$
$$=9\cdot1\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\frac{9}{4}$$

Ⓑ 131 답 ④

$\angle PAO=\theta$이므로

$\angle POB=2\theta$

주어진 반원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 POH에서 $\overline{PH}=r\sin2\theta$, $\overline{OH}=r\cos2\theta$이므로

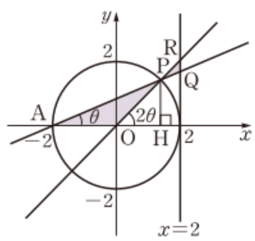
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{PH}$$
$$=\frac{1}{2}r^2\sin2\theta$$
$$T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{HB}\cdot\overline{PH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(r-r\cos2\theta)\cdot r\sin2\theta$$
$$=\frac{1}{2}r^2(1-\cos2\theta)\sin2\theta$$

$\overline{HB}=\overline{OB}-\overline{OH}$
$=r-r\cos2\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)}{\theta^2\times S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}r^2(1-\cos2\theta)\sin2\theta}{\theta^2\cdot\frac{1}{2}r^2\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos2\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$=2$$

Ⓑ **132** 답 ③

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle POH=2\theta$

이므로

$\overline{HO}=2\cos2\theta$

$\overline{HP}=2\sin2\theta$

$\therefore P(2\cos2\theta,\ 2\sin2\theta)$

이때 직선 AP의 방정식은

점 A(−2, 0)을 지나고, 기울기가 $\tan\theta$인 직선

$y-0=\tan\theta(x+2)$

$\therefore y=\tan\theta\cdot x+2\tan\theta$ …… ㉠

직선 OP의 방정식은

$y=\tan2\theta\cdot x$ …… ㉡

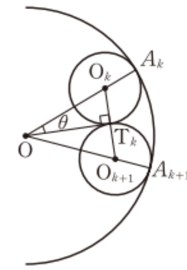
두 직선 ㉠, ㉡이 직선 $x=2$와 만나는 점의 좌표는 각각

$Q(2,\ 4\tan\theta),\ R(2,\ 2\tan2\theta)$

이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin2\theta$$
$$=2\sin2\theta$$
$$T(\theta)=\frac{1}{2}(2\tan2\theta-4\tan\theta)(2-2\cos2\theta)$$
$$=2(\tan2\theta-2\tan\theta)(1-\cos2\theta)$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^4\times S(\theta)}{T(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^4\cdot2\sin2\theta}{2(\tan2\theta-2\tan\theta)(1-\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^4\cdot\sin2\theta}{\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}-2\tan\theta\right)(1-\cos2\theta)}\cdot\frac{(1+\cos2\theta)}{(1+\cos2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^4\cdot\sin2\theta\cdot(1-\tan^2\theta)}{2\tan^3\theta\cdot\sin^22\theta}\cdot(1+\cos2\theta)$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\tan^2\theta}{\frac{2\tan^3\theta}{\theta^3}\cdot2\cdot\frac{\sin2\theta}{2\theta}}\cdot(1+\cos2\theta)$$
$$=\frac{1}{2\cdot2\cdot1}\cdot2$$
$$=\frac{1}{2}$$

Ⓑ **133** 답 ⑤



원 A_k의 중심을 O_k, 반지름의 길이를 r라 하자.

두 원 A_k, A_{k+1}의 접점을 T_k, $\angle O_kOT_k=\theta$라 하면

$\theta=\frac{\pi}{n}$, $\overline{O_kT_k}=r$,

$\angle O_kOO_{k+1}=\frac{2\pi}{n}$이므로

$\angle O_kOT_k$

$=\frac{1}{2}\angle O_kOO_{k+1}$

$=\frac{\pi}{n}$

$\overline{OO_k}=1-r$

직각삼각형 OT_kO_k에서

$$\sin\theta=\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\overline{O_kT_k}}{\overline{OO_k}}$$
$$=\frac{r}{1-r}$$

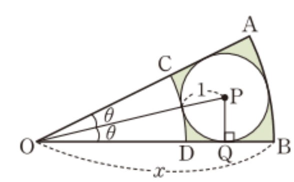
즉 $(1-r)\sin\frac{\pi}{n}=r$이므로

$$\sin\frac{\pi}{n}-r\sin\frac{\pi}{n}=r$$
$$r\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)=\sin\frac{\pi}{n}$$
$$\therefore r=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$$

따라서 $S_n=n\cdot\pi r^2=\frac{\pi n\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\pi^3\cdot\frac{1}{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)^2$$
$$=\pi^3\cdot1\cdot1$$
$$=\pi^3$$

Ⓑ **134** 답 17



$\overline{OB}=x$라 하면

$\overline{OD}=x-2$

$\overline{OP}=x-1$

점 P에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼각형 POQ에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\frac{1}{x-1}$$
$$\therefore x-1=\frac{1}{\sin\theta} \quad\cdots\cdots ㉠$$

한편 부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2}x^2\cdot2\theta=x^2\theta$$

부채꼴 COD의 넓이는

$$\frac{1}{2}(x-2)^2\cdot2\theta=(x-2)^2\theta$$

이므로

$$S(\theta)=x^2\theta-(x-2)^2\theta-\pi$$
$$=x^2\theta-(x^2-4x+4)\theta-\pi$$
$$=4(x-1)\theta-\pi$$
$$=4\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}-\pi\ (\because ㉠)$$
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}S(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\left(4\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}-\pi\right)$$
$$=4\cdot1-\pi$$
$$=4-\pi$$

따라서 $a=4$, $b=-1$이므로

$$a^2+b^2=16+1=17$$

Ⓑ 135 답 ①

$f(x)=e^x\sin x$이므로

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$$

따라서 곡선 $f(x)=e^x\sin x$ 위의 점 $(\pi, 0)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(\pi)=e^\pi\sin\pi+e^\pi\cos\pi$$
$$=-e^\pi$$

Ⓑ 136 답 ①

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+3h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\left\{f\left(\frac{\pi}{3}+3h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}-\left\{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+3h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+3h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3h}\cdot3+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h}$$
$$=3f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=4f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$$f'(x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x$$
$$=\cos^2x-\sin^2x$$
$$=\cos 2x$$

이므로

$$4f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

Ⓑ 137 답 13

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}(3\sin x-2\cos x)=\lim_{x\to0-}(ax+b)=f(0)$$
$$\therefore b=-2$$

다큐 Board

원 P의 넓이는 $\pi\cdot1^2=\pi$

두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,
$y=g(x)h(x)$이면
$y'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$

$$(\cos h-1)(\cos h+1)$$
$$=\cos^2h-1$$
$$=-\sin^2h$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

이때

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{ah-2-(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{ah}{h}$$
$$=a$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{3\sin h-2\cos h-(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{3\sin h}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{2(\cos h-1)}{h}$$
$$=3\lim_{h\to0+}\frac{\sin h}{h}-2\lim_{h\to0+}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}$$
$$=3+2\lim_{h\to0+}\frac{\sin^2h}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos h+1}$$
$$=3+2\cdot1^2\cdot0$$
$$=3$$

이므로

$$a=3$$
$$\therefore a^2+b^2=9+4=13$$

보충학습

함수 $f(x)$에 대하여
(1) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
(2) $x=a$에서의 미분계수 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

06 여러 가지 미분법

Ⓑ 138 답 ①

$g(0)=\frac{f(0)}{f(0)+1}=\frac{b}{b+1}=2$이므로

$2b+2=b \qquad \therefore b=-2$

$f'(x)=2x+a$이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)\{f(x)+1\}-f(x)f'(x)}{\{f(x)+1\}^2}=\frac{f'(x)}{\{f(x)+1\}^2}=\frac{2x+a}{(x^2+ax-1)^2}$$

$\therefore g'(0)=a=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x-2$이므로 $\quad f(1)=1$

Ⓑ 139 답 ④

$$f'(x)=\frac{e^x(x^2+x+1)-e^x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{e^x(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{e^x x(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 모든 실근의 합은 $\quad 0+1=1$

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, $e^x>0$이므로 $x(x-1)=0$

Ⓑ 140 답 ④

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)-f(-h)+f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$$

$-h=t$로 놓으면 $h\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$$

이때 $f(x)=\frac{\sin x}{x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{\cos x(x+1)-\sin x}{(x+1)^2}=\frac{\cos x}{x+1}-\frac{\sin x}{(x+1)^2}$$

이므로 $\quad f'(0)=1$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}=2f'(0)=2$$

Ⓑ 141 답 1

$f'(x)=\cos x+\csc^2 x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+\csc^2\frac{\pi}{2}=0+1=1$$

Ⓑ 142 답 ①

$y'=-\csc x\cot x=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$이므로

$$-\csc x\cot x=-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f(a)=-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$$

$$\therefore \lim_{a\to0+}a^2f(a)=\lim_{a\to0+}\frac{a^2}{\sin^2 a}\cdot(-\cos a)=1\cdot(-1)=-1$$

x의 단위가 라디안일 때, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

보충학습

미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

Ⓑ 143 답 ②

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{\tan h}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{\tan h}=\boxed{1}$$

x의 단위가 라디안일 때, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

또 $x\neq0$일 때,

$$f'(x)=\frac{2x\tan x-x^2\sec^2 x}{\tan^2 x}=\frac{2x}{\tan x}-\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

이므로

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\tan x}-\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)=2-1=1$$

따라서 $\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)$이므로 함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 $\boxed{\text{연속}}$이다.

보충학습

함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

(i) $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

Ⓑ 144 답 ③

$h(x)=g(f(2x))$로 놓으면

$\lim_{x\to1}\frac{g(f(2x))-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-1}{x-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to1}\{h(x)-1\}=0$이므로 $\quad h(1)=1$

또 $\lim_{x\to1}\frac{g(f(2x))-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=2$

이고

$$h'(x)=g'(f(2x))f'(2x)\cdot2=2g'(f(2x))f'(2x)$$

이므로

$$h'(1)=2g'(f(2))f'(2)=2g'(2)f'(2)=2$$

$\therefore f(2)g'(2)=1$

Ⓑ **145** 답 ③

$f(2^x)=4^x+\sin\pi x+x\ln 2$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$f(2^x)=4^x+\sin\pi x+x\ln 2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2^x\ln 2\cdot f'(2^x)=4^x\ln 4+\pi\cos\pi x+\ln 2$$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$$\ln 2\cdot f'(1)=\ln 4+\pi+\ln 2=3\ln 2+\pi$$

$$\therefore f'(1)=3+\frac{\pi}{\ln 2}$$

Ⓑ **146** 답 ③

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{\sin x}$이므로

$$(g\circ f)'(x)=e^{\sin x}\cos x$$

$\cos 2a=\frac{1}{3}$이므로

$$2\cos^2 a-1=\frac{1}{3},\qquad \cos^2 a=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos a=\frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin a=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$0<a<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin a=\sqrt{1-\cos^2 a}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$p=(g\circ f)'(a)=e^{\sin a}\cos a=e^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{6}}{4}p^3=\frac{3\sqrt{6}}{4}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3$$

$$=\frac{3\sqrt{6}}{4}\cdot e^{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$$=e^{\sqrt{3}}$$

Ⓑ **147** 답 ②

$$f'(x)=\frac{2g'(2x)\{g(2x)+1\}-\{g(2x)-1\}2g'(2x)}{\{g(2x)+1\}^2}$$

$$=\frac{4g'(2x)}{\{g(2x)+1\}^2}$$

이므로 $x=1$을 대입하면

$$f'(1)=\frac{4g'(2)}{\{g(2)+1\}^2},\qquad 4=\frac{36}{\{g(2)+1\}^2}$$

$$\{g(2)+1\}^2=9,\qquad g(2)+1=\pm3$$

$$\therefore g(2)=2\ (\because g(2)>0)$$

$a>0$, $a\neq1$이고

$M>0$, $N>0$일 때,

$\log_a MN$

$=\log_a M+\log_a N$

$\log_a\frac{M}{N}$

$=\log_a M-\log_a N$

Ⓑ **148** 답 8

$f(2x-3)=g(3x-2)$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f(1)=g(4)=2$$

$f(2x-3)=g(3x-2)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2f'(2x-3)=3g'(3x-2)$$

위의 식에 $x=2$를 대입하면

$$2f'(1)=3g'(4)$$

$$\therefore g'(4)=\frac{2}{3}f'(1)=\frac{2}{3}\cdot6=4$$

$$\therefore g(4)g'(4)=2\cdot4=8$$

Ⓑ **149** 답 21

$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{f'(k)}{2k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{\frac{2k+1}{k^2+k}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k^2+k}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

따라서 $p=11$, $q=10$이므로

$$p+q=21$$

Ⓑ **150** 답 ③

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x-2}=k$에서 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to2}\{f(x)+2\}=f(2)+2=0$이므로

$$f(2)=-2$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=k$$

이때 $y=\ln|f(x)|$에서 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$이고 $x=2$에서의 미분계수가 4이므로

$$\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{k}{-2}=4\qquad\therefore k=-8$$

Ⓑ **151** 답 ④

$f(x)=\frac{x+2}{x^2(x+1)^3}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln\frac{x+2}{x^2(x+1)^3}$$

$$=\ln(x+2)-\ln x^2-\ln(x+1)^3$$

$$=\ln(x+2)-2\ln x-3\ln(x+1)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x}-\frac{3}{x+1}$$

이므로 $\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{1}{3}-2-\frac{3}{2}=-\frac{19}{6}$

$f(1)=\frac{1+2}{1^2\cdot(1+1)^3}=\frac{3}{8}$

$$\therefore f'(1)=-\frac{19}{6}f(1)=-\frac{19}{6}\cdot\frac{3}{8}=-\frac{19}{16}$$

Ⓑ **152** 답 ②

$f(x)=(x-\sqrt{1+x})^8$에서

$$f'(x)=8(x-\sqrt{1+x})^7\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$\therefore f'(0)=8\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=-4$$

Ⓑ **153** 답 ②

$f(x)=\sqrt{1+\tan^2 x}$로 놓으면 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}-2}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

이때 $f'(x)=\dfrac{\tan x\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$이므로

$f(x)=(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\tan^2 x)^{-\frac{1}{2}}\times 2\tan x\sec^2 x=\frac{\tan x\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$\frac{1}{3}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{3}\sec^2\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{\pi}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 4}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ⓑ **154** 답 ②

$g(1)=a$에서 $f(a)=1$이므로

$$a^3+a^2+a+1=1,\quad a^3+a^2+a=0$$

$$a(a^2+a+1)=0\quad \therefore a=0\ (\because a^2+a+1>0)$$

$g(4)=b$에서 $f(b)=4$이므로

$$b^3+b^2+b+1=4,\quad b^3+b^2+b-3=0$$

$$(b-1)(b^2+2b+3)=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore b=1\ (\because b^2+2b+3>0)$$

또 $f'(x)=3x^2+2x+1$이므로

$$c=g'(1)g'(4)$$

$$=\frac{1}{f'(g(1))}\cdot\frac{1}{f'(g(4))}$$

$$=\frac{1}{f'(0)}\cdot\frac{1}{f'(1)}$$

$$=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore a+b+c=\frac{7}{6}$$

Ⓑ **155** 답 ④

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이어야 한다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to1}\{g(x)-1\}=g(1)-1=0$이므로 $g(1)=1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=g'(1)=4$$

또 $\{(f\circ f)(x)\}'=f'(f(x))f'(x)$이므로

$x=1$에서의 미분계수는

$g(1)=1$이므로 $f(1)=1$

$$f'(1)=\frac{1}{g'(f(1))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{4}$$

$$f'(f(1))f'(1)=f'(1)\cdot f'(1)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

Ⓑ **156** 답 ③

$f(1)=1$이므로 $g(1)=1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-1\}-\{g(x)-1\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)-g'(1)$$

$f(x)=e^{x^3+3x-4}$에서

$$f'(x)=e^{x^3+3x-4}\cdot(2x+3)$$

이므로 $f'(1)=5$

또

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=f'(1)-g'(1)=5-\frac{1}{5}=\frac{24}{5}$$

Ⓑ **157** 답 ③

$x=3$일 때 $y=a$이므로

$$3=a^3-a^2+a+2,\quad a^3-a^2+a-1=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(a-1)(a^2+1)=0\quad \therefore a=1\ (\because a^2+1>0)$$

$x=y^3-y^2+y+2$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2-2y+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2-2y+1}$$

따라서 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{3\cdot1^2-2\cdot1+1}=\frac{1}{2}$$

Ⓑ **158** 답 10

$$\lim_{h\to0}\frac{\sum_{k=1}^{n}g(1+kh)-ng(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\{g(1+kh)-g(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(1+kh)-g(1)}{kh}\cdot k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(1+kh)-g(1)}{kh}\cdot k\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}g'(1)k=g'(1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=g'(1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

Part Ⓑ Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$\tan a=1 \quad \therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

또 $f(x)=\tan x$에서 $f'(x)=\sec^2 x$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

즉 $g'(1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{4}=\frac{55}{2}$이므로

$n(n+1)=110=10\cdot 11$

$\therefore n=10$

Ⓑ 159 답 ⑤

$f(x)=(e^x+e^{-x})\cos x$에서

$$f'(x)=(e^x-e^{-x})\cos x+(e^x+e^{-x})(-\sin x)$$
$$\begin{aligned}f''(x)&=(e^x+e^{-x})\cos x+(e^x-e^{-x})(-\sin x)\\&\quad+(e^x-e^{-x})(-\sin x)\\&\quad+(e^x+e^{-x})(-\cos x)\\&=-2(e^x-e^{-x})\sin x\end{aligned}$$

$f''(x)>0$에서 $\quad -2(e^x-e^{-x})\sin x>0$

$(e^x-e^{-x})\sin x<0, \quad \sin x<0$

$\therefore \pi<x<2\pi \ (\because 0<x<2\pi)$

따라서 $b-a$의 최댓값은 $\quad 2\pi-\pi=\pi$

$0<x<2\pi$에서 $e^x>1$
이므로 $0<\frac{1}{e^x}<1$
$\therefore e^x-e^{-x}>0$

Ⓑ 160 답 ②

$$\begin{aligned}&f'(x)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\ln(x+h)-e^{x+h}\ln x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\ln(x+h)-e^x\ln x-e^{x+h}\ln x+e^x\ln x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}e^x\left\{\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}\right\}-\lim_{h\to 0}\ln x\cdot\left(\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\right)\\&=e^x(\ln x)'-\ln x\cdot(e^x)'\\&=\frac{e^x}{x}-e^x\ln x\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{e^x x-e^x}{x^2}-e^x\ln x-\frac{e^x}{x}\\&=-\frac{e^x}{x^2}-e^x\ln x\end{aligned}$$

$\therefore f''(1)=-e$

Ⓑ 161 답 25

$f(x)=x^2e^{ax+b}$에서

$$f'(x)=2xe^{ax+b}+ax^2e^{ax+b}$$
$$\begin{aligned}f''(x)&=2e^{ax+b}+2axe^{ax+b}+2axe^{ax+b}+a^2x^2e^{ax+b}\\&=2e^{ax+b}+4axe^{ax+b}+a^2x^2e^{ax+b}\end{aligned}$$

$\therefore f''(x)-f'(x)$
$=\{(a^2-a)x^2+(4a-2)x+2\}e^{ax+b}$

또 $\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)-f'(x)}{x-1}=10e$에서 $x\to 1$일 때

(분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다. 즉

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\{f''(x)-f'(x)\}\\&=\lim_{x\to 1}\{(a^2-a)x^2+(4a-2)x+2\}e^{ax+b}\\&=(a^2+3a)e^{a+b}=0\end{aligned}$$

이고 $e^{a+b}>0$이므로

$a^2+3a=0, \quad a(a+3)=0$

$\therefore a=-3 \ (\because a\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f''(x)-f'(x)}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(12x^2-14x+2)e^{-3x+b}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2(6x-1)(x-1)e^{-3x+b}}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}2(6x-1)e^{-3x+b}\\&=10e^{-3+b}=10e\end{aligned}$$

즉 $-3+b=1$이므로 $\quad b=4$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+4^2=25$

Ⅲ. 미분법

07 도함수의 활용 (1)

Ⓑ 162 답 ⑤

$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+1),\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x+2y-1=0$$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 $\quad a+b=3$

Ⓑ 163 답 ①

$f(x)=\tan x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\sec^2 x$

점 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ \text{즉}\ y=2x-\frac{\pi}{2}+1$$

직선 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$이 곡선 $y=x^2+a$에 접하므로

$2x-\frac{\pi}{2}+1=x^2+a$에서

$$x^2-2x+a+\frac{\pi}{2}-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(a+\frac{\pi}{2}-1\right)=2-a-\frac{\pi}{2}=0$$

$$\therefore\ a=2-\frac{\pi}{2}$$

Ⓑ 164 답 5

$f(x)=e^{2bx},\ g(x)=10\ln x+a$로 놓으면

$$f'(x)=2be^{2bx},\ g'(x)=\frac{10}{x}$$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $\quad e^{2b}=a$

$f'(1)=g'(1)$에서 $\quad 2be^{2b}=10$

$$\therefore\ b=\frac{5}{e^{2b}}$$

$$\therefore\ ab=e^{2b}\cdot\frac{5}{e^{2b}}=5$$

보충학습

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 가지면
① $x=t$에서 두 곡선이 만난다. ➔ $f(t)=g(t)$
② $x=t$에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같다. ➔ $f'(t)=g'(t)$

$x+2y+3=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$이므로 직선 $x+2y+3=0$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 2이다.

단축Key
$y=x^2+a$에서 $y'=2x$이므로 $2x=2$에서 $\quad x=1$
즉 곡선 $y=x^2+a$가 점 $\left(1,\ 3-\frac{\pi}{2}\right)$를 지나므로
$3-\frac{\pi}{2}=1+a$
$\therefore\ a=2-\frac{\pi}{2}$

직선 $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$이 곡선 $y=x^2+a$에 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+a+\frac{\pi}{2}-1=0$은 중근을 갖는다.

$\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}$
$=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ⓑ 165 답 ⑤

$f(x)=e^x+e^{-x}$으로 놓으면 $\quad f'(x)=e^x-e^{-x}$

접점의 좌표는 $(a,\ b)$이고 직선 $x+2y+3=0$과 수직인 직선의 기울기는 2이므로

$$e^a-e^{-a}=2,\qquad (e^a)^2-2e^a-1=0$$

$$\therefore\ e^a=1+\sqrt{2}\ (\because\ e^a>0)$$

또 $b=e^a+e^{-a}=1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$이므로

$$e^a+b=(1+\sqrt{2})+2\sqrt{2}=1+3\sqrt{2}$$

Ⓑ 166 답 ④

$y=-\ln(x+e)$에서 $\quad y'=-\frac{1}{x+e}$

삼각형 APB의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기와 같은 $-\frac{1}{3}$이어야 한다.

이때 접점의 좌표를 $(t,\ -\ln(t+e))$라 하면

$$-\frac{1}{t+e}=-\frac{1}{3}\qquad\therefore\ t=3-e$$

따라서 점 $(3-e,\ -\ln 3)$에서의 접선의 방정식은

$$y-(-\ln 3)=-\frac{1}{3}(x-3+e),\ \text{즉}$$

$$y=-\frac{1}{3}x+1-\frac{1}{3}e-\ln 3$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x+1-\frac{1}{3}e-\ln 3$이므로

$$f(3)=-\frac{1}{3}e-\ln 3$$

Ⓑ 167 답 ②

$x\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$에서

$$x^2(a^2-x^2)=\frac{1}{3}x^2,\qquad x^2\left(x^2-a^2+\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\therefore\ x=0\ \text{또는}\ x=-\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}\ \text{또는}\ x=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}$$

따라서 점 P의 x좌표는 $\sqrt{a^2-\frac{1}{3}}$이고 삼각형 OPQ가 정삼각형이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$이어야 한다.

이때 $y=x\sqrt{a^2-x^2}$에서

$$y'=\sqrt{a^2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

이므로

$$\frac{a^2-2\left(a^2-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{a^2-\left(a^2-\frac{1}{3}\right)}}=\frac{-a^2+\frac{2}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-a^2+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3},\qquad a^2=1$$

$$\therefore\ a=1\ \left(\because\ a>\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

다큐 Board

Ⓑ 168 답 ②

$f(x)=\ln x$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $B(t,\ \ln t)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

이 직선이 점 $A(0,\ 1)$을 지나므로

$$1-\ln t=-1, \qquad \ln t=2 \qquad \therefore\ t=e^2$$

따라서 $B(e^2,\ 2)$, $C(e^2,\ 0)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^2=e^2$$

Ⓑ 169 답 6

$f(x)=(x-4)e^x$으로 놓으면

$$f'(x)=e^x+(x-4)e^x=(x-3)e^x$$

접점의 좌표를 $(t,\ (t-4)e^t)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=(t-3)e^t$이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-4)e^t=(t-3)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$$-(t-4)e^t=(t-3)e^t(a-t)$$

$$-(t-4)=(t-3)(a-t)\ (\because\ e^t>0)$$

$$t^2-(a+4)t+3a+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+4)^2-4(3a+4)=a^2-4a<0$$

$$a(a-4)<0 \qquad \therefore\ 0<a<4$$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은 $\quad 6$

$1+2+3=6$

Ⓑ 170 답 ①

$f(x)=e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$$

이므로

$$f'(n\pi)=e^{n\pi}\cos n\pi-e^{n\pi}\sin n\pi=e^{n\pi}\cos n\pi$$
$$=(-1)^n e^{n\pi}$$

이때 $f(n\pi)=e^{n\pi}\cos n\pi=(-1)^n e^{n\pi}$이므로 접선 l의 방정식은

$$y-(-1)^n e^{n\pi}=(-1)^n e^{n\pi}(x-n\pi)$$

위의 식에 $y=0$을 대입하면 $\qquad x=n\pi-1$

$$\therefore\ A(n\pi-1,\ 0)$$

접선 l과 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)^n e^{n\pi}=-\frac{1}{(-1)^n e^{n\pi}}(x-n\pi)$$

위의 식에 $y=0$을 대입하여 정리하면 $\qquad x=n\pi+e^{2n\pi}$

$$\therefore\ B(n\pi+e^{2n\pi},\ 0)$$

따라서

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot|f(n\pi)|=\frac{1}{2}(e^{2n\pi}+1)e^{n\pi}$$

$n\pi+e^{2n\pi}-(n\pi-1)$
$=e^{2n\pi}+1$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{e^{3n\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(e^{2n\pi}+1)e^{n\pi}}{e^{3n\pi}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{2n\pi}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}$$

Ⓑ 171 답 ②

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+3)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)>0$에서 $\qquad -x^2+2x+3>0$

$$x^2-2x-3<0, \qquad (x+1)(x-3)<0$$

$$\therefore\ -1<x<3$$

따라서 정수 x는 0, 1, 2의 3개이다.

Ⓑ 172 답 ⑤

ㄱ. $g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$이므로

$$g''(x)$$
$$=\frac{\{f'(x)x-f(x)\}'x^2-\{f'(x)x-f(x)\}\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{\{f''(x)x+f'(x)-f'(x)\}x-2\{f'(x)x-f(x)\}}{x^3}$$
$$=\frac{f''(x)x^2-2f'(x)x+2f(x)}{x^3}$$

ㄴ. $g(1)=f(1)$, $g'(1)=f'(1)$이므로 $x=1$인 점에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 접선은 일치한다.

$g'(1)=f'(1)-f(1)$
$=f'(1)$
$(\because\ f(1)=0)$

ㄷ. $f(1)=0$, $f'(x)>0$이므로 $0<x<1$에서

$$f(x)<0$$

또 $f'(x)x>0$이므로 $\qquad f'(x)x-f(x)>0$

즉 $0<x<1$에서 $g'(x)>0$이므로 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

$g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$
에서 $x^2>0$,
$f'(x)x-f(x)>0$이므로
$g'(x)>0$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓑ 173 답 ⑤

$f(x)=\dfrac{ax+1}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-(ax+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2x+a}{(x^2+1)^2}$$

본책 · 121~122쪽

$f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-2)=\frac{-3a+4}{25}=0 \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$$

즉 $-\frac{4}{3}x^2-2x+\frac{4}{3}=0$에서

$$2x^2+3x-2=0, \qquad (x+2)(2x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 극댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{3}$

Ⓑ 174 답 ⑤

ㄱ. $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

이므로 $f'(0)=1$

ㄴ. $f'(x)=0$에서 $1-2x^2=0$

$$\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	0

따라서 극댓값은 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. ㄴ에 의하여 구간 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$는 증가한다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

Ⓑ 175 답 2

$f(x)=(x^2+ax+a)e^x$에서

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+a)e^x$$

$$=\{x^2+(a+2)x+2a\}e^x$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4\cdot 2a\le 0$$

$$a^2-4a+4\le 0, \qquad (a-2)^2\le 0$$

$$\therefore a=2$$

정의역의 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$

보충학습

$f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$에서 $h(x)$가 이차식이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이면

① $f(x)$가 극값을 갖는다.
→ $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
→ $h(x)=0$이 중근 또는 허근을 갖는다.

Ⓑ 176 답 ②

$f(x)=\frac{a}{x}-4\ln x-ax$에서

$x>0$

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{4}{x}-a=-\frac{ax^2+4x+a}{x^2}$$

(i) $a=0$일 때

$f'(x)=-\frac{4}{x}$이므로 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(ii) $a\ne 0$일 때

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극값을 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-a^2=4-a^2>0, \qquad a^2-4<0$$

$$(a+2)(a-2)<0 \qquad \therefore -2<a<2$$

이때 $a\ne 0$이므로

$$-2<a<0 \text{ 또는 } 0<a<2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 두 근은 모두 양수이므로

$$-\frac{4}{a}>0 \qquad \therefore a<0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-2<a<0$

(i), (ii)에서 정수 a는 -1이다.

Ⓑ 177 답 ⑤

$y=\frac{x-t}{x^2+1}$에서

$$y'=\frac{(x^2+1)-(x-t)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2tx+1}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$에서 $-x^2+2tx+1=0$이므로

$$x=t\pm\sqrt{t^2+1}$$

$x=t+\sqrt{t^2+1}$에서 극댓값을 가지므로

$x=t+\sqrt{t^2+1}$의 좌우에서 y'의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

$$f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$$

$$\therefore g(t)=\frac{t+\sqrt{t^2+1}-t}{(t+\sqrt{t^2+1})^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^2+2t\sqrt{t^2+1}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2\sqrt{t^2+1}(t+\sqrt{t^2+1})}$$

$$=\frac{1}{2(t+\sqrt{t^2+1})}=\frac{1}{2f(t)} \quad (f(t)>0)$$

$f(t)=t+\sqrt{t^2+1}>t+\sqrt{t^2}$
$=t+|t|\ge 0$

따라서 그래프의 개형은 ⑤와 같다.

Ⅲ. 미분법

08 도함수의 활용 (2)

Ⓑ **178** 답 ⑤

$f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$에서

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^4}+e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{2}{(x-2)^3}$$

$$=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\frac{2x-3}{(x-2)^4}$$

$\frac{f(a)+f(b)}{2}<f\left(\frac{a+b}{2}\right)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty, k)$에서 위로 볼록하다.

즉 $f''(x)<0$이므로 $\quad 2x-3<0 \quad \therefore x<\frac{3}{2}$

따라서 k의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다.

보충학습

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$에 대하여

① $\frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

② $\frac{f(a)+f(b)}{2}<f\left(\frac{a+b}{2}\right)$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

Ⓑ **179** 답 ①

ㄱ. $f(x)=x^n\ln x$에서

$$f'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=x^{n-1}(n\ln x+1)$$

이므로 $\quad f'(1)=1$

따라서 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=x-1$$

> $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

ㄴ. $f'(x)=0$에서 $\quad n\ln x+1=0$

> $x^{n-1}(n\ln x+1)=0$에서 $x>0$이므로 $x^{n-1}>0$ $\therefore n\ln x+1=0$

$\ln x=-\frac{1}{n} \quad \therefore x=e^{-\frac{1}{n}}$

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{1}{n}}$에서 극솟값을 가지므로

$$g(n)=f(e^{-\frac{1}{n}})=(e^{-\frac{1}{n}})^n\ln e^{-\frac{1}{n}}=-\frac{1}{en}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{en}\right)=0$$

ㄷ. $f''(x)=(n-1)x^{n-2}(n\ln x+1)+nx^{n-2}$

$$=x^{n-2}\{n(n-1)\ln x+2n-1\}$$

$0<x<e^{-\frac{3}{2}}$에서 $n=2$이면

$$f''(x)=2\ln x+3<0$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

Ⓑ **180** 답 5

$f(x)=(x+a)e^{-2x}$으로 놓으면

$$f'(x)=e^{-2x}-2(x+a)e^{-2x}=e^{-2x}(-2x-2a+1)$$

$$f''(x)=-2(-2x-2a+1)e^{-2x}-2e^{-2x}$$

$$=(4x+4a-4)e^{-2x}$$

$f''(x)=0$에서

$$4x+4a-4=0 \ (\because e^{-2x}>0)$$

$$\therefore x=-a+1$$

따라서 $-a+1=-4$이므로 $\quad a=5$

> $x<-a+1$일 때 $f''(x)<0$이고 $x>-a+1$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x=-a+1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

Ⓑ **181** 답 ①

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+5$에서

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b$$

$x=-1$에서 극대이므로 $\quad f'(-1)=0$

$\therefore 3a-2b+c=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

변곡점의 좌표가 $(1, -6)$이므로

$f(1)=-6$에서 $\quad a+b+c+5=-6$

$\therefore a+b+c=-11 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$f''(1)=0$에서 $\quad 6a+2b=0$

$\therefore 3a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-3, c=-9$$

$$\therefore 3a+2b+c=3-6-9=-12$$

Ⓑ **182** 답 ②

$f(x)=(1+\sin x)^2$으로 놓으면

$$f'(x)=2(1+\sin x)\cos x$$

$$f''(x)=2\cos^2 x-2(1+\sin x)\sin x$$

$$=2\cos^2 x-2\sin^2 x-2\sin x$$

$$=2(1-\sin^2 x)-2\sin^2 x-2\sin x$$

$$=-4\sin^2 x-2\sin x+2$$

$$=-2(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $f''(x)=0$에서

$$\sin x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{\pi}{6}$$

$0<x<\frac{\pi}{6}$일 때 $f''(x)>0$이고 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$일 때 $f''(x)<0$이다.

즉 $x=\frac{\pi}{6}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ⓑ **183** 답 ①

$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2(x^2+1)\{(x^2+1)-4x^2\}}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	⤵

따라서 $A(0, 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Ⓑ **184** 답 ①

$f(x)=(1-\sin x)\sin x$에서

$$f'(x)=-\cos x\sin x+(1-\sin x)\cos x$$
$$=-\cos x(2\sin x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\left(\because \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$을 갖고, $x=\frac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 -2를 가지므로 구하는 합은

$$\frac{1}{4}+(-2)=-\frac{7}{4}$$

Ⓑ **185** 답 ③

ㄱ. $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$에서

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$에서

$\sqrt{4-x^2}-x=0$, $\sqrt{4-x^2}=x$

$4-x^2=x^2$, $x^2=2$

$\therefore x=\sqrt{2}$

$\sqrt{4-x^2}=x\ge 0$이므로 $x=-\sqrt{2}$는 근이 아니다.

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$에서

$$f''(x)=-\frac{\sqrt{4-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2}$$
$$=-\frac{\sqrt{4-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$
$$=-\frac{\frac{4-x^2+x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$
$$=-\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

$f''(x)\ne 0$이므로 변곡점이 존재하지 않는다.

ㄷ. ㄱ에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 -2를 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Ⓑ **186** 답 ③

$f(x)=\left(\frac{x}{6}\right)^n e^{n-x}$에서

$$f'(x)=n\left(\frac{x}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot e^{n-x}+\left(\frac{x}{6}\right)^n e^{n-x}\cdot(-1)$$
$$=\frac{n-x}{6}\cdot\left(\frac{x}{6}\right)^{n-1}\cdot e^{n-x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	극대	↘

즉 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극대이면서 최대이므로

$$g(n)=f(n)=\left(\frac{n}{6}\right)^n$$
$$\therefore g(3)=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

Ⓑ **187** 답 ②

직선 l_2의 기울기를 $k(k<a)$라 하면 직선 l_2의 방정식은

$y-2=k(x-1)$, 즉 $y=kx-k+2$

두 직선 $y=ax$, $y=kx-k+2$의 교점 P의 x좌표는

$ax=kx-k+2$에서 $x=\frac{2-k}{a-k}$

다큐 Board

또한 직선 l_2의 y절편은 $-k+2$이므로 삼각형 OPQ의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-k}{a-k}\cdot(2-k)=\frac{(2-k)^2}{2(a-k)}$$

이고

$$\frac{dS}{dk}=\frac{-2(2-k)\cdot 2(a-k)-(2-k)^2\cdot(-2)}{4(a-k)^2}$$
$$=\frac{(2-k)(k-2a+2)}{2(a-k)^2}$$

$\frac{dS}{dk}=0$에서 $\quad k=2a-2$ ($\because k\neq 2$)

$k<a<2$이므로 $\quad k\neq 2$

$k=2a-2$의 좌우에서 $\frac{dS}{dk}$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 S는 $k=2a-2$에서 최솟값을 갖는다.

이때 삼각형 OPQ의 넓이의 최솟값이 3이므로

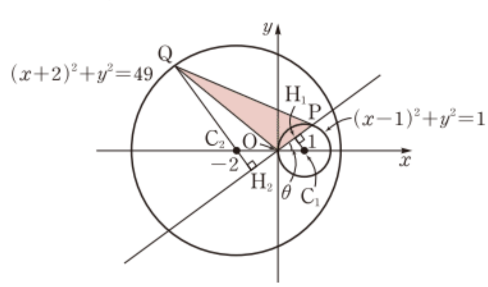
$$\frac{\{2-(2a-2)\}^2}{2\{a-(2a-2)\}}=\frac{(4-2a)^2}{2(-a+2)}=2(2-a)=3$$

$4-2a=3,\quad 2a=1\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 직선 l_2의 기울기는 $\quad k=2\cdot\frac{1}{2}-2=-1$

Ⓑ 188 답 ⑤

다음 그림과 같이 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라 하고 두 원 $(x-1)^2+y^2=1$, $(x+2)^2+y^2=49$의 중심을 각각 $C_1(1,\ 0)$, $C_2(-2,\ 0)$이라 할 때, 두 점 C_1, C_2에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



이때 $\overline{OH_1}=\cos\theta$이므로 $\quad\overline{OP}=2\overline{OH_1}=2\cos\theta$

또 $\angle C_2OH_2=\theta$, $\overline{OC_2}=2$이므로

$\quad\overline{C_2H_2}=2\sin\theta$

삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되려면 높이가

$\quad\overline{QH_2}=\overline{QC_2}+\overline{C_2H_2}=7+2\sin\theta$

이어야 한다. 이때의 삼각형 OPQ의 넓이를 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot(7+2\sin\theta)$$
$$=\cos\theta(7+2\sin\theta)$$

이므로

$$f'(\theta)=-\sin\theta(7+2\sin\theta)+\cos\theta\cdot 2\cos\theta$$
$$=-4\sin^2\theta-7\sin\theta+2$$
$$=-(\sin\theta+2)(4\sin\theta-1)$$

$2\cos^2\theta$
$=2(1-\sin^2\theta)$

따라서 $f'(\theta)=0$에서 $\quad\sin\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta=\frac{1}{4}$을 만족시키는 θ의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2}\right)$이라 하면

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이고 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은

$$\frac{\sqrt{15}}{4}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{15\sqrt{15}}{8}$$

Ⓑ 189 답 ③

ㄱ. $f(x)=\ln(x^2-x+2)$에서 $\quad f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$

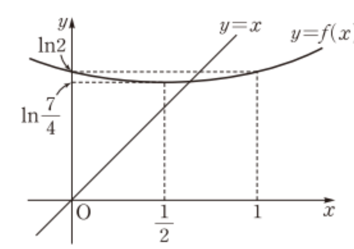
$f'(x)=0$에서 $\quad 2x-1=0\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

x^2-x+2
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$
이므로 $\quad x^2-x+2>0$

$x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{7}{4}$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $0\le x\le 1$에서 방정식 $f(x)=x$는 1개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f''(x)=\frac{2(x^2-x+2)-(2x-1)^2}{(x^2-x+2)^2}$

$$=\frac{-2x^2+2x+3}{(x^2-x+2)^2}=\frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}}{(x^2-x+2)^2}$$

$-2x^2+2x+3$
$=-2(x^2-x)+3$
$=-2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3$
$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

이므로 $0\le x\le 1$에서 $\quad f''(x)>0$

따라서 $0\le x\le 1$에서 $f'(x)$는 증가하므로 $f'(x)$의 최솟값은 $f'(0)=-\frac{1}{2}$, 최댓값은 $f'(1)=\frac{1}{2}$이다.

이때 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c가 $a<c<b$에 존재하므로

$-\frac{1}{2}<f'(c)<\frac{1}{2}$에서 $\quad|f'(c)|<\frac{1}{2}$

$$\therefore\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=|f'(c)|<\frac{1}{2}$$

즉 $|f(b)-f(a)|<\frac{1}{2}|b-a|$가 성립한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

Ⓑ **190** 답 ⑤

$f(x)=g(x)$에서 $\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$이므로

$$a=\frac{\cos x-x\sin x}{x^2}$$

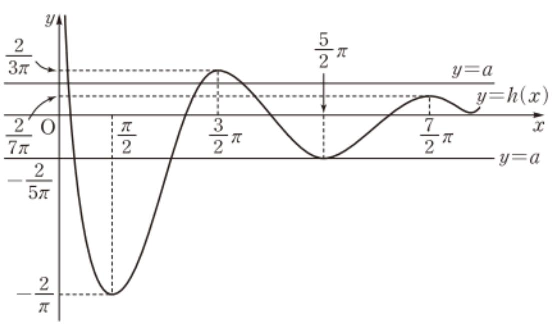
$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$로 놓으면

$$h'(x)=\frac{(-2\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x^2\cos x-2\cos x}{x^3}=-\frac{(x^2+2)\cos x}{x^3}$$

$x>0$일 때 $h'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}\pi$ …

함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$\dfrac{2}{7\pi}<a<\dfrac{2}{3\pi}$ 또는 $a=-\dfrac{2}{5\pi}$

즉 $\alpha=\dfrac{2}{7\pi}$, $\beta=\dfrac{2}{3\pi}$, $\gamma=-\dfrac{2}{5\pi}$이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{7}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi-\frac{5}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

Ⓑ **191** 답 34

$h(x)=e^{g(x)}-e^4$이므로 $h'(x)=g'(x)e^{g(x)}$

$h(x)h'(x)=\{e^{g(x)}-e^4\}g'(x)e^{g(x)}=0$에서

$e^{g(x)}-e^4=0$ 또는 $g'(x)=0$ ($\because e^{g(x)}>0$)

(i) $e^{g(x)}-e^4=0$일 때

$e^{g(x)}=e^4$이므로 $g(x)=4$ …… ㉠

(ii) $g'(x)=0$일 때

$g'(x)=2x-1=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 $h(x)h'(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면 ㉠을 만족시키는 x의 값이 $\dfrac{1}{2}$이거나 존재하지 않으면 되므로

$g(x)=x^2-x+\dfrac{k}{8}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{k}{8}-\dfrac{1}{4}$에서

$\dfrac{k}{8}-\dfrac{1}{4}\geq 4$ $\therefore\ k\geq 34$

즉 자연수 k의 최솟값은 34이다.

Ⓑ **192** 답 ③

$7\sin^{8n}x+x=0$에서 $7\sin^{8n}x=-x$

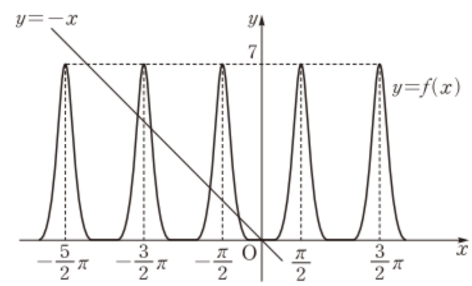
$f(x)=7\sin^{8n}x$라 하면 $f'(x)=56n\sin^{8n-1}x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore\ x=m\pi$ 또는 $x=\dfrac{2m-1}{2}\pi$ (단, m은 정수)

> $x=m\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하고 $x=\dfrac{2m-1}{2}\pi$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 변한다.

$-8<-\dfrac{5}{2}\pi<-7$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x$는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $7\sin^{8n}x+x=0$은 서로 다른 5개의 실근을 갖는다.

Ⓑ **193** 답 ③

$\dfrac{4x+1}{x}=4+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $t\geq 5$

> $0<x\leq 1$이므로 $\dfrac{1}{x}\geq 1$
> $\therefore\ t=4+\dfrac{1}{x}\geq 5$

이때 주어진 부등식은 $t\geq a\ln t$이고 $\ln t>0$이므로

$$\frac{t}{\ln t}\geq a$$

$f(t)=\dfrac{t}{\ln t}$로 놓으면

$$f'(t)=\frac{\ln t-t\cdot\frac{1}{t}}{(\ln t)^2}=\frac{\ln t-1}{(\ln t)^2}>0$$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=5$에서 최솟값 $\dfrac{5}{\ln 5}$를 가지므로

> $t\geq 5$에서 $f'(t)>0$이므로 함수 $f(t)$는 $t\geq 5$에서 증가한다.

$f(t)\geq a$가 항상 성립하려면 $a\leq\dfrac{5}{\ln 5}$

즉 실수 a의 최댓값은 $\dfrac{5}{\ln 5}$이다.

Ⓑ **194** 답 ⑤

$f(x)=x^n+(n-1)b^{\frac{n}{n-1}}-nbx$라 하면

$f'(x)=nx^{n-1}-nb=n(\boxed{x^{n-1}-b})$

$n-1\geq 1$이므로 $x=\boxed{b^{\frac{1}{n-1}}}$에서 함수 $f(x)$는 극소이면서 $\boxed{\text{최솟값}}$을 갖는다.

> $f'(x)=0$에서
> $x^{n-1}-b=0$
> $\therefore\ x=b^{\frac{1}{n-1}}$
> $x<b^{\frac{1}{n-1}}$에서 $f'(x)<0$, $x>b^{\frac{1}{n-1}}$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $x=b^{\frac{1}{n-1}}$에서 극소이다.

$$f\left(\boxed{b^{\frac{1}{n-1}}}\right)=\left(\boxed{b^{\frac{1}{n-1}}}\right)^n+(n-1)b^{\frac{n}{n-1}}-nb\cdot\boxed{b^{\frac{1}{n-1}}}$$
$$=b^{\frac{n}{n-1}}+(n-1)b^{\frac{n}{n-1}}-nb^{1+\frac{1}{n-1}}=\boxed{0}$$

이므로

$$x^n+(n-1)b^{\frac{n}{n-1}}-nbx\geq 0$$

즉 $x^n+(n-1)b^{\frac{n}{n-1}}\geq nbx$

따라서 $a^n+(n-1)b^{\frac{n}{n-1}}\geq nab$가 성립하고 등호는 $a=b^{\frac{1}{n-1}}$, 즉 $\boxed{b=a^{n-1}}$일 때 성립한다.

Ⅳ. 적분법

09 여러 가지 적분법

Ⓑ 195 답 ①

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\Big[\sin x-\ln|x|\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=(\sin\pi-\ln\pi)-\left(\sin\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\ln\pi-1+\ln\frac{\pi}{2}$$

$$=-1+\ln\frac{1}{2}$$

$$=-1-\ln 2$$

Ⓑ 196 답 ①

$|2^x-2|=\begin{cases}2-2^x & (0\le x\le 1)\\ 2^x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^2|2^x-2|dx=\int_0^1(2-2^x)dx+\int_1^2(2^x-2)dx$$

$$=\left[2x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right]_1^2$$

$$=\left(2-\frac{2}{\ln 2}\right)+\frac{1}{\ln 2}+\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)-\frac{2}{\ln 2}+2$$

$$=\frac{1}{\ln 2}$$

Ⓑ 197 답 ⑤

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(e^x-1)dx+\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx$$

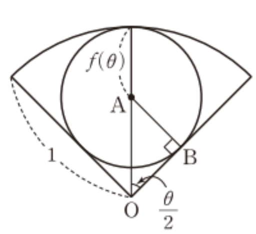
$$=\Big[e^x-x\Big]_{-1}^0+\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1$$

$$=1-\left(\frac{1}{e}+1\right)+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{e}$$

Ⓑ 198 답 ③

다음 그림과 같이 부채꼴의 중심을 O, 내접하는 원의 중심을 A, 부채꼴과 원이 내접하는 점 중 한 점을 B라 하자.



다큐 Board

$\overline{\mathrm{OA}}=1-f(\theta)$, $\overline{\mathrm{AB}}=f(\theta)$이므로

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{f(\theta)}{1-f(\theta)}$$

$$\{1-f(\theta)\}\sin\frac{\theta}{2}=f(\theta)$$

$$\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)f(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore f(\theta)=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\ \left(\because 1+\sin\frac{\theta}{2}\neq 0\right)$$

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\sin\frac{\theta}{2}<1$

$\therefore 1<1+\sin\frac{\theta}{2}<2$

$$\therefore \int_0^{\frac{2}{3}\pi}f(\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1+\sin\frac{\theta}{2}-1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(1-\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}1d\theta-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta+\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$\frac{1}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$=\sec^2\frac{\theta}{2}$

$$=\frac{2}{3}\pi-\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta+\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sec\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\left[2\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[2\sec\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-2\sqrt{3}+4-2$$

$$=\frac{2}{3}\pi-2\sqrt{3}+2$$

Ⓑ 199 답 ①

$x^2+3x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+3$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=11$이므로

$2^2+3\cdot2+1=11$

$$\int_0^2\frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx=\int_1^{11}\frac{1}{t}dt$$

$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^{11}$$

$$=\ln 11$$

단축Key

$$\int_0^2\frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$$

$$=\Big[\ln|x^2+3x+1|\Big]_0^2$$

$$=\ln 11$$

Ⓑ 200 답 138

$2x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{3}{2}$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{8x+4}\,f(2x+1)dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{4t}\,f(t)\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\int_1^4\sqrt{t}\,f(t)dt$$
$$=\int_1^2 t\sqrt{t}\,dt+\int_2^4 2\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int_1^2 t^{\frac{3}{2}}dt+2\int_2^4 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_1^2+2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^4$$
$$=\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)+\frac{4}{3}(8-2\sqrt{2})$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{2}{5}+\frac{32}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{154-16\sqrt{2}}{15}$$

$f(x)=\begin{cases}x & (0\le x<2)\\ 2 & (2\le x\le 4)\end{cases}$

따라서 $a=154$, $b=-16$이므로

$a+b=138$

Ⓑ 201 답 25

$\int_1^2 f(x-1)dx=3$에서 $x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$

또 $x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 f(x-1)dx=\int_0^1 f(t)dt=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=4$에서 $\frac{x}{2}=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}$

또 $x=2$일 때 $s=1$, $x=4$일 때 $s=2$이므로

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_1^2 f(s)ds=4$$
$$\therefore \int_1^2 f(s)ds=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편 $f(x)=f(x+2)$에서 $f(x)$는 주기함수이므로

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=\cdots=\int_8^{10} f(x)dx$$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$\int_0^{10} f(x)dx=5\int_0^2 f(x)dx$$
$$=5\left\{\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\right\}$$
$$=5(3+2)=25$$

보충학습

주기함수의 정적분

주기가 p인 함수 $f(x)$, 즉 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$인 함수 $f(x)$의 정적분의 값은 다음을 이용하여 구한다.

① $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$

② $\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

Ⓑ 202 답 ①

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x$$

또 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^n x\,dx=\int_1^0 t^n\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^1 t^n dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}$$

즉 $a_n=\frac{1}{n+1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

Ⓑ 203 답 ②

$e^x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=e$, $x=2$일 때 $t=e^2$이므로

$$g(t)=\begin{cases}f(\ln t) & (1\le t<e)\\ g\left(\frac{t}{e}\right)+4 & (e\le t\le e^2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_1^{e^2}g(x)dx=\int_1^e f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+4\right\}dx$$
$$=5e^2+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $\frac{x}{e}=k$로 놓으면 $\frac{dk}{dx}=\frac{1}{e}$

또 $x=e$일 때 $k=1$, $x=e^2$일 때 $k=e$이므로

$$\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+4\right\}dx=\int_1^e\{g(k)+4\}e\,dk$$
$$=e\left\{\int_1^e g(k)dk+\int_1^e 4\,dk\right\}$$
$$=e\left\{\int_1^e g(k)dk+\left[4k\right]_1^e\right\}$$
$$=e\left\{\int_1^e f(\ln k)dk+4e-4\right\}$$
$$=e\int_1^e f(\ln k)dk+4e^2-4e$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_1^e f(\ln x)dx+e\int_1^e f(\ln x)dx+4e^2-4e=5e^2+3$$

$$(e+1)\int_1^e f(\ln x)dx=e^2+4e+3$$
$$=(e+3)(e+1)$$

$$\therefore \int_1^e f(\ln x)dx=e+3$$

Ⓑ **204** 답 ④

$\int_0^\pi x\cos 2x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$$f'(x)=1,\ g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\therefore \int_0^\pi x\cos 2x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0$$

Ⓑ **205** 답 3

$\int_1^2 x\ln nx\,dx$에서 $f(x)=\ln nx$, $g'(x)=x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \int_1^2 x\ln nx\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln nx\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=2\ln 2n-\frac{1}{2}\ln n-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$$
$$=\ln 4+2\ln n-\frac{1}{2}\ln n-\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\ln n+\ln 4-\frac{3}{4}$$

즉 $a_n=\frac{3}{2}\ln n+\ln 4-\frac{3}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}2n(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}3n\ln\frac{n+1}{n}$$
$$=3\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=3$$

Ⓑ **206** 답 ④

$$\int_{-2}^2(x+x^2)f(x)dx=\int_{-2}^2 xf(x)dx+\int_{-2}^2 x^2f(x)dx$$

이때 $g(x)=xf(x)$, $h(x)=x^2f(x)$로 놓으면

$$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x),$$
$$h(-x)=(-x)^2f(-x)=x^2f(x)=h(x)$$

이므로

$$\int_{-2}^2(x+x^2)f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 g(x)dx+\int_{-2}^2 h(x)dx$$
$$=2\int_0^2 h(x)dx$$
$$=2\int_0^2 x^2e^x dx$$
$$=2\left(\left[x^2e^x\right]_0^2-\int_0^2 2xe^x dx\right)$$
$$=8e^2-4\int_0^2 xe^x dx$$
$$=8e^2-4\left(\left[xe^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx\right)$$
$$=8e^2-8e^2+4\left[e^x\right]_0^2$$
$$=4(e^2-1)$$

Ⓑ **207** 답 ④

ㄱ. $f(x)=x-\ln(e^x+1)$에서

$$f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 극값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $f''(x)=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$이므로

$$f''(x)+\{f'(x)\}^2e^x$$
$$=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}+\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=0$$

ㄷ. $\int_0^1 xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)dx$

$$=f'(1)-\left[f(x)\right]_0^1$$
$$=f'(1)-f(1)+f(0)$$
$$=\frac{1}{e+1}-\{1-\ln(e+1)\}-\ln 2$$
$$=-\frac{e}{e+1}+\ln\frac{e+1}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

Ⓑ **208** 답 ⑤

$\int_0^2 f(t)dt=k$(k는 상수)로 놓으면

$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}+k$이므로

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2\left(\frac{2t}{t^2+1}+k\right)dt$$
$$=\left[\ln|t^2+1|+kt\right]_0^2$$
$$=\ln 5+2k$$

즉 $\ln 5+2k=k$이므로

$$k=-\ln 5$$

다큐 Board

$f(-x)=f(x)$이면
$\int_{-a}^a f(x)dx$
$=2\int_0^a f(x)dx$
$f(-x)=-f(x)$이면
$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

$2\ln 2n=2(\ln 2+\ln n)$
$=2\ln 2+2\ln n$
$=\ln 4+2\ln n$

$a_{n+1}-a_n$
$=\left\{\frac{3}{2}\ln(n+1)+\ln 4-\frac{3}{4}\right\}$
$-\left(\frac{3}{2}\ln n+\ln 4-\frac{3}{4}\right)$
$=\frac{3}{2}\ln(n+1)-\frac{3}{2}\ln n$
$=\frac{3}{2}\ln\frac{n+1}{n}$

$f(x)=e^{|x|}$이므로
$f(-x)=e^{|-x|}$
$=e^{|x|}$
$=f(x)$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-\ln 5$이므로

$f(0)=-\ln 5$

Ⓑ 209 답 ④

$\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=a$로 놓으면 $f(x)=x^2+a$이므로

$$\begin{aligned}a&=\int_0^\pi (t^2+a)\sin t\,dt\\&=\int_0^\pi (t^2\sin t+a\sin t)dt\\&=\int_0^\pi t^2\sin t\,dt+a\Big[-\cos t\Big]_0^\pi\\&=\int_0^\pi t^2\sin t\,dt+2a\end{aligned}$$

$\therefore a=-\int_0^\pi t^2\sin t\,dt$ …… ㉠

$g(t)=t^2$, $h'(t)=\sin t$로 놓으면

$g'(t)=2t$, $h(t)=-\cos t$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^\pi t^2\sin t\,dt&=\Big[-t^2\cos t\Big]_0^\pi+2\int_0^\pi t\cos t\,dt\\&=\pi^2+2\int_0^\pi t\cos t\,dt \quad\text{…… ㉡}\end{aligned}$$

$u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^\pi t\cos t\,dt&=\Big[t\sin t\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt\\&=-\Big[-\cos t\Big]_0^\pi\\&=-2 \quad\text{…… ㉢}\end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\begin{aligned}a&=-\int_0^\pi t^2\sin t\,dt=-\{\pi^2+2\cdot(-2)\}\\&=-\pi^2+4\end{aligned}$$

따라서

$f(x)=x^2+\int_0^\pi f(t)\sin t dt=x^2-\pi^2+4$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $-\pi^2+4$를 갖는다.

Ⓑ 210 답 ④

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2(x+1)$

$xf'(x)=2(x+1)$

$\therefore f'(x)=2+\dfrac{2}{x}$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=\int\left(2+\frac{2}{x}\right)dx\\&=2x+2\ln x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$x>0$이므로 $\ln|x|=\ln x$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+C$

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=f(1)-4,\qquad f(1)-4=0$

$\therefore f(1)=4$

즉 $2+C=4$이므로 $\qquad C=2$

따라서 $f(x)=2x+2\ln x+2$이므로

$f(e)=2e+4$

Ⓑ 211 답 2

$x-t=y$로 놓으면 $\qquad \dfrac{dy}{dt}=-1$

또 $t=0$일 때 $y=x$, $t=x$일 때 $y=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(x-t)dt&=\int_x^0 (x-y)f(y)\cdot(-1)dy\\&=\int_0^x (x-y)f(y)dy\\&=x\int_0^x f(y)dy-\int_0^x yf(y)dy\\&=\sin 2x-kx\end{aligned}$$

$x\int_0^x f(y)dy-\int_0^x yf(y)dy=\sin 2x-kx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(y)dy+xf(x)-xf(x)=2\cos 2x-k$

$\therefore \int_0^x f(y)dy=2\cos 2x-k$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=2-k$

$\therefore k=2$

Ⓑ 212 답 ④

$f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 3을 가지므로

$f'(0)=0$, $f(0)=3$

$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 0을 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=0$

한편

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt\\&=x\int_x^{x+1}f(t)dt-\int_x^{x+1}tf(t)dt\end{aligned}$$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_x^{x+1}f(t)dt+x\{f(x+1)-f(x)\}\\&\quad-\{(x+1)f(x+1)-xf(x)\}\\&=\int_x^{x+1}f(t)dt-f(x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x\{f(x+1)-f(x)\}\\&-\{(x+1)f(x+1)-xf(x)\}\\&=xf(x+1)-xf(x)\\&\quad-xf(x+1)-f(x+1)\\&\quad+xf(x)\\&=-f(x+1)\end{aligned}$$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$g''(x)=f(x+1)-f(x)-f'(x+1)$

$$\begin{aligned}\therefore g''(0)&=f(1)-f(0)-f'(1)\\&=0-3-0\\&=-3\end{aligned}$$

다큐 Board

Ⓑ **213** 답 ①

조건 (나)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)$$
$$=\frac{e^2-1}{2}-e^{2x}-\left\{\int_x^1 f(t)dt-(x+1)f(x)\right\}$$
$$\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt=\frac{e^2-1}{2}-e^{2x}+f(x)$$
$$\int_0^1 f(t)dt=\frac{e^2-1}{2}-e^{2x}+f(x)$$
$$\frac{1}{2}(e^2-1)=\frac{e^2-1}{2}-e^{2x}+f(x)\ (\because \text{(가)})$$
$$\therefore f(x)=e^{2x}$$
$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

Ⓑ **214** 답 ②

$\int_a^x (x-t)f(t)dt=2\sin x-2x\cos a+b$에서

$$x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt=2\sin x-2x\cos a+b$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=2\cos x-2\cos a$$
$$\therefore \int_a^x f(t)dt=2\cos x-2\cos a$$

다시 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=-2\sin x$$

조건 (나)에서

$$f(a)=-2\sin a=-2, \qquad \sin a=1$$
$$\therefore a=\frac{\pi}{2}\ (\because 0<a<\pi)$$

조건 (가)의 등식에 $x=a$를 대입하면

$$2\sin a-2a\cos a+b=0$$

이므로

$$2\sin\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+b=0$$
$$2+b=0 \qquad \therefore b=-2$$
$$\therefore ab=-\pi$$

Ⓑ **215** 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1+\frac{2}{n}}+e^{1+\frac{4}{n}}+e^{1+\frac{6}{n}}+\cdots+e^{1+\frac{2n}{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{1+\frac{2k}{n}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{1+\frac{2k}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 e^x\,dx=\frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}(e^3-e)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p}f(x)dx$$

Ⓑ **216** 답 ②

직선 $x+y=1$의 기울기는 -1이다.

$\angle OAP_1=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P_k에서 x축에 내린 수선의 발을 H_k라 하면

$$\overline{P_kH_k}=\overline{AP_k}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{b_k}{\sqrt{2}}$$

또 $\angle AOP_k=\frac{k\pi}{2n}$이므로

$$\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\overline{P_kH_k}}{a_k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b_k}{a_k}$$
$$\therefore \frac{b_k}{a_k}=\sqrt{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\sqrt{2}\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=\sqrt{2}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$=\sqrt{2}\left(0+\frac{2}{\pi}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Ⅳ. 적분법

10 정적분의 활용

Ⓑ 217 답 ①

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

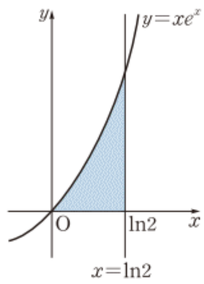
$$\int_0^{\ln 2} xe^x dx$$

$$=\Big[xe^x\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} e^x dx$$

$$=2\ln 2-\Big[e^x\Big]_0^{\ln 2}$$

$$=2\ln 2-(2-1)$$

$$=2\ln 2-1$$



Ⓑ 218 답 4

$x^2f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $y=x^2f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1} x^2f'(x)dx=2\int_0^1 x^2f'(x)dx$$

$$=2\left\{\Big[x^2f(x)\Big]_0^1-\int_0^1 2xf(x)dx\right\}$$

$$=2\left\{f(1)-2\int_0^1 xf(x)dx\right\}$$

$$=2(4-2)$$

$$=4$$

Ⓑ 219 답 10

$\sqrt{x}=mx$의 양변을 제곱하면

$x=m^2x^2,\qquad (m^2x-1)x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\dfrac{1}{m^2}$

이때 직선 $y=mx$와 곡선 $y=\sqrt{x}$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\dfrac{1}{60}$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{m^2}}(\sqrt{x}-mx)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{m}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{m^2}}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{m}{2}\left(\frac{1}{m^2}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3m^3}-\frac{1}{2m^3}$$

$$=\frac{1}{6m^3}=\frac{1}{60}$$

$\therefore m^3=10$

Ⓑ 220 답 ③

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 방정식

$$\frac{1}{x}=-2x+a,\ \text{즉 } 2x^2-ax+1=0 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2},\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$이고

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(-2\beta+a+2\alpha-a)^2}$$

$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{-2(\beta-\alpha)\}^2}$$

$$=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}$$

$$=(\beta-\alpha)\sqrt{5}\ (\because \beta-\alpha>0)$$

이므로 $\quad(\beta-\alpha)\sqrt{5}=\sqrt{5}$

$\therefore \beta-\alpha=1$

즉 $\dfrac{\sqrt{a^2-8}}{2}=1$이므로

$\sqrt{a^2-8}=2,\qquad a^2-8=4$

$a^2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>2\sqrt{2})$

㉠에서 $2x^2-2\sqrt{3}x+1=0$이므로

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_\alpha^\beta\left(-2x+2\sqrt{3}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\Big[-x^2+2\sqrt{3}x-\ln x\Big]_\alpha^\beta$$

$$=(-\beta^2+2\sqrt{3}\beta-\ln\beta)-(-\alpha^2+2\sqrt{3}\alpha-\ln\alpha)$$

$$=\alpha^2-\beta^2+2\sqrt{3}(\beta-\alpha)+\ln\alpha-\ln\beta$$

$$=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+2\sqrt{3}(\beta-\alpha)+\ln\frac{\alpha}{\beta}$$

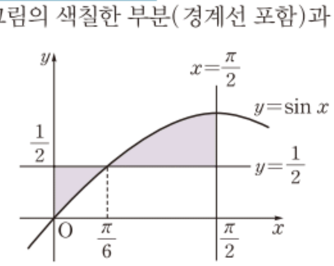
$$=\sqrt{3}\cdot(-1)+2\sqrt{3}\cdot 1+\ln\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}+\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\sqrt{3}+\ln(2-\sqrt{3})$$

Ⓑ 221 답 ①

연립부등식 $\begin{cases}0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \left(y-\dfrac{1}{2}\right)(y-\sin x)\le 0\end{cases}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$$\beta-\alpha=\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$$
$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2-8}}{2}$$

$g(x)=x^2f'(x)$라 하면
$g(-x)=(-x)^2f'(-x)$
$=x^2f'(x)$
이므로 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$가 우함수이면
$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

$y-\dfrac{1}{2}\ge 0,\ y-\sin x\le 0$
또는 $y-\dfrac{1}{2}\le 0,\ y-\sin x\ge 0$
$\therefore y\ge\dfrac{1}{2},\ y\le\sin x$
또는 $y\le\dfrac{1}{2},\ y\ge\sin x$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\cos x-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$$

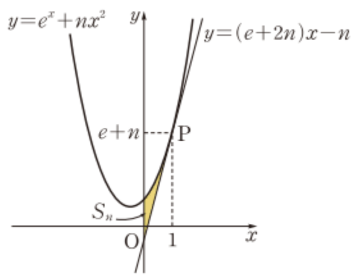
$$=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$$

Ⓑ **222** 답 ②

$y=e^x+nx^2$에서 $y'=e^x+2nx$이므로 곡선 위의 점 P$(1,\ e+n)$에서의 접선 l_n의 기울기는 $e+2n$이고 접선의 방정식은

$$y-(e+n)=(e+2n)(x-1),\ \text{즉}$$

$$y=(e+2n)x-n$$



$$\therefore\ S_n=\int_0^1\{(e^x+nx^2)-(e+2n)x+n\}dx$$

$$=\left[e^x+\frac{n}{3}x^3-\frac{e+2n}{2}x^2+nx\right]_0^1$$

$$=e+\frac{n}{3}-\frac{e+2n}{2}+n-1$$

$$=\frac{1}{2}e+\frac{n}{3}-1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{2n}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

Ⓑ **223** 답 ③

$f(x)=xe^{1-x}$에서 $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$이므로 점 $(t,\ te^{1-t})$에서의 접선 l_t의 방정식은

$$y-te^{1-t}=(1-t)e^{1-t}(x-t),\ \text{즉}$$

$$y=(1-t)e^{1-t}(x-t)+te^{1-t}$$

$$=(1-t)e^{1-t}x+t^2e^{1-t}$$

한편 $f(x)=0$에서 $x=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나고, $f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=1$을 갖는다.

또 $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{1-x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접선 l_t: $y=(1-t)e^{1-t}x+t^2e^{1-t}$은 다음 그림과 같다.

다큐 Board

$$\frac{(2-t^2)e^{1-t}}{2(1-t)}$$

$$=\frac{e^{1-t}}{2}\cdot\frac{2-t^2}{1-t}$$

$$=\frac{e^{1-t}}{2}\cdot\frac{1+1-t^2}{1-t}$$

$$=\frac{e^{1-t}}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1-t^2}{1-t}\right)$$

$$=\frac{e^{1-t}}{2}\left(\frac{1}{1-t}+t+1\right)$$

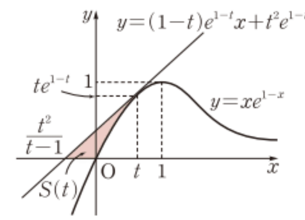
$1-t=a$로 놓으면 $t\to 1-$일 때 $a\to 0+$이므로

$$\lim_{t\to1-}\frac{e^{1-t}-1}{2(1-t)}$$

$$=\lim_{a\to0+}\frac{e^a-1}{2a}$$

$$=\frac{1}{2}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$



$$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{t^2}{t-1}\right)te^{1-t}-\int_0^t xe^{1-x}dx$$

$$=-\frac{t^2e^{1-t}}{2(t-1)}-\left[-xe^{1-x}\right]_0^t$$

$$+\int_0^t(-e^{1-x})dx$$

$$=-\frac{t^2e^{1-t}}{2(t-1)}+te^{1-t}+\left[e^{1-x}\right]_0^t$$

$$=-\frac{t^2e^{1-t}}{2(t-1)}+te^{1-t}+e^{1-t}-e$$

$$=\frac{(t^2-2)e^{1-t}}{2(t-1)}-e$$

$$\therefore\ \lim_{t\to1-}\left\{S(t)-\frac{1}{2(1-t)}\right\}$$

$$=\lim_{t\to1-}\left\{\frac{(t^2-2)e^{1-t}}{2(t-1)}-e-\frac{1}{2(1-t)}\right\}$$

$$=\lim_{t\to1-}\left\{\frac{(2-t^2)e^{1-t}}{2(1-t)}-e-\frac{1}{2(1-t)}\right\}$$

$$=\lim_{t\to1-}\left\{\frac{e^{1-t}}{2}\left(\frac{1}{1-t}+t+1\right)-e-\frac{1}{2(1-t)}\right\}$$

$$=\lim_{t\to1-}\left\{\frac{e^{1-t}-1}{2(1-t)}+\frac{(t+1)e^{1-t}}{2}-e\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+1-e$$

$$=\frac{3}{2}-e$$

Ⓑ **224** 답 ②

곡선 $y=\sin\pi x+k$는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이고

$2a=b$이므로　　$a=\frac{1}{2}b=c$

따라서 $\int_0^1(\sin\pi x+k)dx=0$이므로

$$\int_0^1(\sin\pi x+k)dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+kx\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{\pi}+k+\frac{1}{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}+k$$

$$=0$$

$$\therefore\ k=-\frac{2}{\pi}$$

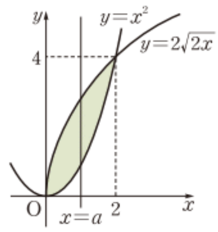
Ⓑ **225** 답 ④

$x^2=2\sqrt{2x}$에서　　$x^4=8x$

$$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore\ x=0\ \text{또는}\ x=2$$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2(2\sqrt{2x}-x^2)dx$$
$$=\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}$$

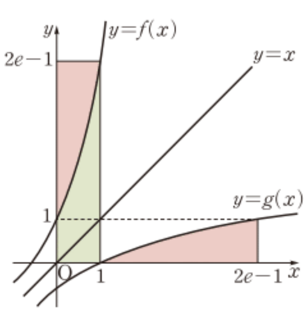
S가 직선 $x=a$에 의하여 이등분되므로

$$\int_0^a(2\sqrt{2x}-x^2)dx=\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}a^3$$
$$=\frac{4}{3}$$

$$a^3-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+4=0, \qquad (a^{\frac{3}{2}})^2-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+4=0$$
$$\therefore a^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\pm\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}$$
$$=2\sqrt{2}\pm2$$
$$\therefore a^3=4(3-2\sqrt{2})\ (\because 0<a^3<8)$$

Ⓑ 226 답 ③

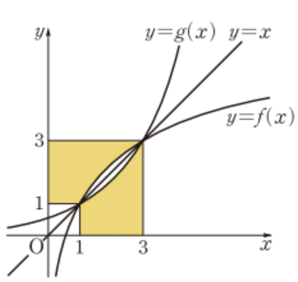
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 $\int_1^{2e-1}g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=2e-1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



$$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_1^{2e-1}g(x)dx=2e-1$$

Ⓑ 227 답 ③

조건 ㈎에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 증가한다. 또 조건 ㈏에 의하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

조건 ㈐에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)dx=8$$

이므로 $\quad \int_1^3 f(x)dx=\frac{16}{3}$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\int_1^3 g(x)dx=(3\cdot3-1\cdot1)-\frac{16}{3}$$
$$=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$$

Ⓑ 228 답 ①

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

이때 $4-x^2=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=4$, $x=2$일 때 $t=0$이고 $\frac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$V=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx=\int_4^0\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{t}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$$

$a>b$일 때,
$\int_a^b f(x)dx$
$=-\int_b^a f(x)dx$

Ⓑ 229 답 ③

$-x^2+4=t$에서 $\qquad x^2=4-t \qquad \therefore x=\pm\sqrt{4-t}$

즉 포물선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표는

$x=-\sqrt{4-t}$ 또는 $x=\sqrt{4-t}$

입체도형을 y축과 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_{-\sqrt{4-t}}^{\sqrt{4-t}}(-x^2+4-t)dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{4-t}}(-x^2+4-t)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+(4-t)x\right]_0^{\sqrt{4-t}}$$
$$=2\left\{-\frac{1}{3}(4-t)\sqrt{4-t}+(4-t)\sqrt{4-t}\right\}$$
$$=\frac{4}{3}(4-t)\sqrt{4-t}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^3\frac{4}{3}(4-t)\sqrt{4-t}dt=\int_1^3\frac{4}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}}dt$$
$$=\frac{4}{3}\left[-\frac{2}{5}(4-t)^{\frac{5}{2}}\right]_1^3$$
$$=\frac{8}{15}(3^{\frac{5}{2}}-1)$$
$$=\frac{8}{15}(9\sqrt{3}-1)$$

MEMO