01 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

유제 본문 5~11쪽

1 9　2 ⑤　3 ①　4 ④　5 ⑤
6 ③　7 ⑤　8 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 12쪽

1 ②　2 18　3 ②　4 ③　5 ③

Level 2 기본 연습 본문 13쪽

1 8　2 ④　3 ③　4 ②

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ⑤　2 ④　3 22

02 지수함수와 로그함수의 도함수

유제 본문 17~23쪽

1 ⑤　2 ⑤　3 ④　4 ①　5 ③
6 ②　7 ⑤　8 ③

Level 1 기초 연습 본문 24쪽

1 8　2 ②　3 ③　4 ③　5 ④

Level 2 기본 연습 본문 25쪽

1 ③　2 ③　3 ①　4 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 26쪽

1 ④　2 7　3 ①　4 18

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 본문 29~37쪽

1 ①　2 24　3 ④　4 ④　5 ⑤
6 ④　7 ③　8 ④　9 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 38쪽

1 ①　2 ②　3 9　4 ③　5 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 39쪽

1 ④　2 ①　3 40　4 ②

Level 3 실력 완성 본문 40쪽

1 128　2 4　3 ③　4 9

04 삼각함수의 미분

유제
본문 43~49쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ④ 5 ②
6 ③ 7 ④ 8 ④

Level 1 기초 연습
본문 50쪽

1 ② 2 ① 3 ① 4 ② 5 ④

Level 2 기본 연습
본문 51쪽

1 ④ 2 ① 3 3 4 6 5 ④

Level 3 실력 완성
본문 52쪽

1 ③ 2 9 3 ① 4 ③

05 여러 가지 미분법

유제
본문 55~63쪽

1 ② 2 6 3 84 4 ④ 5 24
6 ② 7 ② 8 36 9 20 10 ③

Level 1 기초 연습
본문 64~65쪽

1 ① 2 ① 3 1 4 ③ 5 ⑤
6 ② 7 ① 8 70

Level 2 기본 연습
본문 66쪽

1 ④ 2 ④ 3 17 4 3

Level 3 실력 완성
본문 67쪽

1 ② 2 ② 3 41

06 도함수의 활용

유제
본문 71~79쪽

1 ④ 2 31 3 ① 4 ② 5 ④
6 ① 7 ① 8 ② 9 ④ 10 ②

Level 1 기초 연습
본문 80쪽

1 ② 2 ② 3 ① 4 ② 5 ④

Level 2 기본 연습
본문 81쪽

1 22 2 ④ 3 ② 4 ④

Level 3 실력 완성
본문 82쪽

1 ② 2 ② 3 1

07 여러 가지 적분법

유제

본문 85~93쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ⑤ 5 ③
6 9 7 5 8 ③ 9 ② 10 ②

Level 1 기초 연습

본문 94~95쪽

1 ③ 2 ③ 3 ① 4 ① 5 ②
6 ⑤ 7 ② 8 ④ 9 ②

Level 2 기본 연습

본문 96쪽

1 ⑤ 2 8 3 ④ 4 ④

Level 3 실력 완성

본문 97쪽

1 ④ 2 ④ 3 110

08 정적분의 활용

유제

본문 101~107쪽

1 ③ 2 ② 3 ① 4 ① 5 ③
6 ③ 7 ③

Level 1 기초 연습

본문 108쪽

1 ③ 2 ③ 3 ① 4 ③

Level 2 기본 연습

본문 109쪽

1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 ②

Level 3 실력 완성

본문 110쪽

1 ① 2 ④ 3 ①

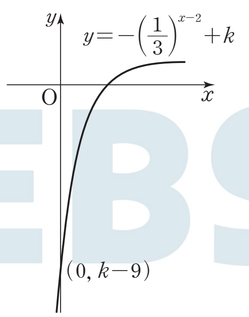
01 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

유제 본문 5~11쪽

1 9	2 ⑤	3 ①	4 ④	5 ⑤
6 ③	7 ⑤	8 ⑤		

1 함수 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+k$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+k$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 $k-9$이므로 함수 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 $k-9\le 0$이어야 한다.



따라서 $k\le 9$이므로 구하는 자연수 k의 개수는 9이다.

답 9

2 $f(x)=2^{x+1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

$=2^{x+1}\times 2^{-2x}$

$=2^{-x+1}$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$0<\frac{1}{2}<1$이므로 $-2\le x\le 1$에서

함수 $f(x)$의 최댓값 M은

$M=f(-2)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=8$

함수 $f(x)$의 최솟값 m은

$m=f(1)=2\times\frac{1}{2}=1$

따라서 $Mm=8\times 1=8$

답 ⑤

3 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y-b=\log_2(x-a)$에서

$y=\log_2(x-a)+b$

곡선 $y=\log_2(x-a)+b$가 두 점 $(2a,\ 3)$, $(5a,\ k)$를 지나므로

$\log_2(2a-a)+b=3$에서

$\log_2 a+b=3$

$\log_2(5a-a)+b=k$에서

$\log_2 4a+b=k$

따라서

$k=\log_2 4a+b$

$=\log_2 4+\log_2 a+b$

$=\log_2 2^2+\log_2 a+b$

$=2+(\log_2 a+b)$

$=2+3=5$

답 ①

4 함수 $f(x)=\log_2(3x+1)-1$은 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $1\le x\le 5$에서

함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(5)=\log_2 16-1$

$=\log_2 2^4-1$

$=4-1=3$

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=\log_2 4-1$

$=\log_2 2^2-1$

$=2-1=1$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$3+1=4$

답 ④

5 $2^x+\frac{6}{2^x}=8$의 양변에 2^x을 곱하여 정리하면

$(2^x)^2-8\times 2^x+6=0$

$2^x=t\ (t>0)$으로 놓으면

$t^2-8t+6=0$

$t=4\pm\sqrt{10}$

이차방정식 $t^2-8t+6=0$의 두 근이 서로 다른 양수이므로

방정식 $2^x+\frac{6}{2^x}=8$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 방정식 $2^x+\frac{6}{2^x}=8$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식 $t^2-8t+6=0$의 두 근은 2^α, 2^β이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2^\alpha\times2^\beta=6$에서 $2^{\alpha+\beta}=6$이므로
$\alpha+\beta=\log_2 6$

답 ⑤

6 $\frac{81}{9^{2x}}\geq3^{1-3x}$에서
$\frac{3^4}{(3^2)^{2x}}\geq3^{1-3x}$
$3^{4-4x}\geq3^{1-3x}$
$4-4x\geq1-3x$
따라서 $x\leq3$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x의 개수는 3이다

답 ③

7 $\log_5 x+\log_5 x\times\log_{\frac{2}{3}} x=0$에서
로그의 진수의 조건에 의하여 $x>0$ …… ㉠
$(\log_5 x)(1+\log_{\frac{2}{3}} x)=0$
$\log_5 x=0$ 또는 $\log_{\frac{2}{3}} x=-1$
$x=5^0=1$ 또는 $x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $\alpha=1$, $\beta=\frac{3}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=1$이므로
$4^{\alpha+\beta}=4^{1+\frac{3}{2}}=4^{\frac{5}{2}}=2^5=32$

답 ⑤

8 $\log_2(x-1)<\log_4(2x+6)$에서
로그의 진수의 조건에 의하여
$x-1>0$이고 $2x+6>0$
즉, $x>1$이고 $x>-3$이므로 $x>1$ …… ㉠
$\log_2(x-1)=\log_4(x-1)^2$이므로
$\log_4(x-1)^2<\log_4(2x+6)$
$(x-1)^2<2x+6$
$x^2-2x+1<2x+6$
$x^2-4x-5<0$
$(x+1)(x-5)<0$
$-1<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $1<x<5$이므로 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은
$2+3+4=9$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ② 2 18 3 ② 4 ③ 5 ③

1 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}+b$는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로 $-1\leq x\leq2$에서
함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a-1}+b$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-a-1}+b=56$
$3\times3^a+b=56$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a+2}+b$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-a+2}+b=4$
$\frac{1}{9}\times3^a+b=4$ …… ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$\left(3-\frac{1}{9}\right)\times3^a=52$
$\frac{26}{9}\times3^a=52$
$3^a=18$
$3^a=18$을 ㉠에 대입하면 $b=2$
따라서 $3^{ab}=(3^a)^b=18^2=324$

답 ②

2 점 $\mathrm{A}(0, a)$라 하면 $a=3^0=1$이므로
$\mathrm{A}(0, 1)$
점 $\mathrm{C}(c, 1)$이라 하면
$\log_3(c-1)=1$에서 $c-1=3$, $c=4$이므로

$C(4,\ 1)$
점 $B(b,\ 0)$이라 하면
$\log_3(b-1)=0$에서 $b-1=1$, $b=2$이므로
$B(2,\ 0)$이고 $D(2,\ 3^2)$
따라서 $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=9$이고 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로
사각형 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(4\times9)=18$

답 18

3 곡선 $y=3^{x+1}-5$ 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 중점이 원점 O이므로 양수 a에 대하여 두 점을
$A(-a,\ 3^{-a+1}-5)$, $B(a,\ 3^{a+1}-5)$
로 놓을 수 있다.
두 점 A, B가 원점 O에 대하여 대칭이므로
$-(3^{-a+1}-5)=3^{a+1}-5$
$3^{a+1}+3^{-a+1}-10=0$
위의 방정식의 양변에 3^a을 곱하면
$3\times3^{2a}-10\times3^a+3=0$
$3^a=t\,(t>0)$으로 놓으면
$3t^2-10t+3=0$
$(3t-1)(t-3)=0$
$t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$
$3^a=\frac{1}{3}$ 또는 $3^a=3$이므로
$a=-1$ 또는 $a=1$
이때 a는 양수이므로 $a=1$이고, $A(-1,\ -4)$, $B(1,\ 4)$이다.
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

답 ②

4 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(k,\ 2^{k-2})$, $B(k,\ -2^{-k+1})$이고, $\overline{AB}=\frac{3}{2}$이므로
$2^{k-2}-(-2^{-k+1})=\frac{3}{2}$
$\frac{1}{4}\times2^k+2\times2^{-k}=\frac{3}{2}$
위의 방정식의 양변에 4×2^k을 곱하면
$(2^k)^2-6\times2^k+8=0$
$2^k=t\,(t>0)$으로 놓으면
$t^2-6t+8=0$
$(t-2)(t-4)=0$
$t=2$ 또는 $t=4$
$2^k=2$ 또는 $2^k=4$
따라서 $k=1$ 또는 $k=2$이므로 구하는 모든 상수 k의 값의 합은 $1+2=3$

답 ③

5 모든 실수 x에 대하여 부등식
$x^2+2x\log_3 a+2\log_3 a>0$이 성립하려면 이차방정식
$x^2+2x\log_3 a+2\log_3 a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(\log_3 a)^2-2\log_3 a<0$이어야 한다.
$(\log_3 a)(\log_3 a-2)<0$
$0<\log_3 a<2$
$3^0<a<3^2$
즉, $1<a<9$
따라서 구하는 자연수 a의 개수는 7이다.

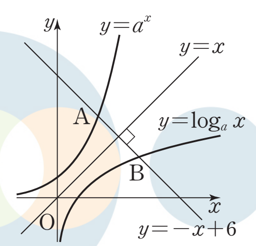
답 ③

Level 2 기본 연습

본문 13쪽

1 8 2 ④ 3 ③ 4 ②

1 함수 $y=\log_a x$는 함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 곡선 $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 점 A의 x좌표를 k라 하면 $A(k,\ 6-k)$이고,
점 $B(6-k,\ k)$이므로
$\overline{AB}^2=(6-2k)^2+(2k-6)^2=(2\sqrt{2})^2$
$2(2k-6)^2=8$
$8(k^2-6k+9)=8$
$k^2-6k+8=0$

$(k-2)(k-4)=0$

$k=2$ 또는 $k=4$

(i) $k=2$이면 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$이고, 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^2=4$

$a>1$이므로 $a=2$

(ii) $k=4$이면 $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$이므로 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다는 조건을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에서 $a=2$이므로

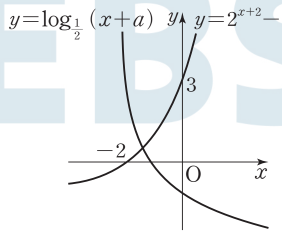
$a^3=2^3=8$

답 8

2 곡선 $y=2^{x+2}-1$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 곡선으로

$x=0$일 때, $2^{0+2}-1=3$이므로 점 $(0,\ 3)$을 지나고

$y=0$일 때, $2^{x+2}-1=0$에서 $x=-2$이므로 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.



곡선 $y=2^{x+2}-1$과 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)$가 제2사분면에서 만나려면 a의 값은 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)$가 점 $(0,\ 3)$을 지나도록 하는 a의 값보다는 커야 하고, 점 $(-2,\ 0)$을 지나도록 하는 a의 값보다는 작아야 한다.

곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)$가 점 $(0,\ 3)$을 지나도록 하는 a의 값은 $3=\log_{\frac{1}{2}}(0+a)$에서 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$이므로

$a>\frac{1}{8}$ …… ㉠

곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)$가 점 $(-2,\ 0)$을 지나도록 하는 a의 값은 $0=\log_{\frac{1}{2}}(-2+a)$에서 $a-2=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$이므로

$a-2<1$, 즉 $a<3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는

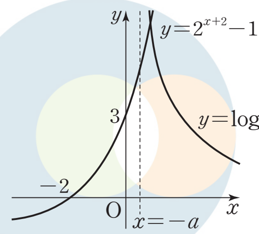
$\frac{1}{8}<a<3$

답 ④

다른 풀이

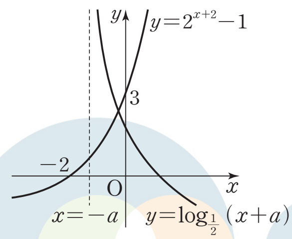
곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)$의 점근선은 직선 $x=-a$이므로 a의 값이 다음 (i), (ii), (iii)의 범위에 있을 때로 나누어 생각하자.

(i) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$일 때



두 곡선은 제1사분면에서 만나므로 구하는 a의 값은 없다.

(ii) $-2\le -a<0$, 즉 $0<a\le 2$일 때



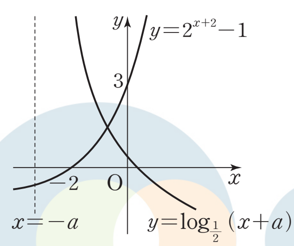
$\log_{\frac{1}{2}}(0+a)<3$이어야 하므로

$a>\left(\frac{1}{2}\right)^3$에서 $a>\frac{1}{8}$

그런데 $0<a\le 2$이므로

$\frac{1}{8}<a\le 2$

(iii) $-a<-2$, 즉 $a>2$일 때



$\log_{\frac{1}{2}}(-2+a)>0$이고 $\log_{\frac{1}{2}}(0+a)<3$이어야 하므로

$a-2<1$이고 $a>\left(\frac{1}{2}\right)^3$에서 $\frac{1}{8}<a<3$

그런데 $a>2$이므로

$2<a<3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$\frac{1}{8}<a<3$

3 $(\log_2 x)^2+3=k\log_2 x$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2-kt+3=0$
방정식 $(\log_2 x)^2+3=k\log_2 x$의 두 근 α, β의 비가 $1:4$이므로 두 근을 α, 4α라 하면
로그의 진수의 조건에 의하여 $\alpha>0$이고,
이차방정식 $t^2-kt+3=0$의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 4\alpha$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2 \alpha+\log_2 4\alpha=k$
즉, $2\log_2 \alpha+2=k$ …… ㉠
$(\log_2 \alpha)(\log_2 4\alpha)=3$
즉, $(\log_2 \alpha)(2+\log_2 \alpha)=3$ …… ㉡
㉡에서 $\log_2 \alpha=s$로 놓으면
$s(2+s)=3$
$s^2+2s-3=0$
$(s-1)(s+3)=0$
$s=1$ 또는 $s=-3$
$s=1$, 즉 $\log_2 \alpha=1$이면
㉠에서 $2\times1+2=4=k$이므로 $k<0$을 만족시키지 못한다.
$s=-3$, 즉 $\log_2 \alpha=-3$이면
㉠에서 $2\times(-3)+2=-4=k$
이때 $\alpha=2^{-3}=\frac{1}{8}$이므로
$\alpha k=\frac{1}{8}\times(-4)=-\frac{1}{2}$

답 ③

4 $1-\log_{\frac{1}{2}} f(x)\le\log_2 \{2g(x)\}$에서
로그의 진수의 조건에 의하여
$f(x)>0$, $g(x)>0$ …… ㉠
$1-\log_{\frac{1}{2}} f(x)=1-\{-\log_2 f(x)\}$
$=1+\log_2 f(x)$
$\log_2 \{2g(x)\}=\log_2 2+\log_2 g(x)$
$=1+\log_2 g(x)$
이므로 주어진 부등식은
$1+\log_2 f(x)\le1+\log_2 g(x)$
$\log_2 f(x)\le\log_2 g(x)$
$f(x)\le g(x)$ …… ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로
$0<f(x)\le g(x)$
부등식 $0<f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는
$-2<x<4$ …… ㉢
부등식 $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는
$x\le0$ 또는 $x\ge2$ …… ㉣
㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는
$-2<x\le0$ 또는 $2\le x<4$
이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 2, 3이다.
따라서 구하는 정수 x의 개수는 4이다.

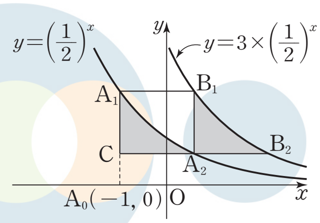
답 ②

Level 3 실력 완성

본문 14쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** 22

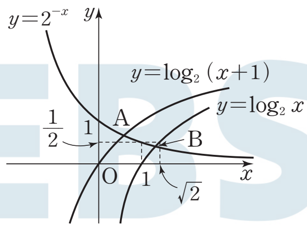
1 $A_0(-1,\ 0)$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$에서
$A_1(-1,\ 2)$
$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-\log_2 3}$이므로
곡선 $y=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$을 x축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동한 곡선이다.
따라서 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=\log_2 3$이므로
두 점 B_1과 A_2의 x좌표는
$-1+\log_2 3=\log_2 2^{-1}+\log_2 3=\log_2 \frac{3}{2}$
점 A_2의 y좌표는
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 \frac{3}{2}}=2^{-\log_2 \frac{3}{2}}=2^{\log_2 \frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$
한편, 선분 A_2B_2의 연장선이 선분 A_0A_1과 만나는 점을 C라 하면



위의 그림과 같이 색칠된 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 직사각형 $A_1CA_2B_1$의 넓이와 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는
$\left(2-\frac{2}{3}\right)\times\log_2 3=\frac{4}{3}\log_2 3$

답 ⑤

2 ㄱ. 곡선 $y=2^{-x}$은 두 점 $(0,\ 1)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고, 곡선 $y=\log_2(x+1)$은 원점 O와 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$은 직선 $y=\frac{1}{2}$의 위쪽에 있다.



따라서 $y_1=\log_2(x_1+1)>\frac{1}{2}$이므로 $x_1+1>2^{\frac{1}{2}}$에서 $x_1>\sqrt{2}-1$ (거짓)

ㄴ. 곡선 $y=2^{-x}$은 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고,

$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$이므로 곡선 $y=\log_2 x$는

점 $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다.

또 곡선 $y=\log_2 x$는 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 ㄱ의 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$는 두 직선 $x=1$과 $x=\sqrt{2}$ 사이에 있다.

따라서 $1<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 곡선 $y=2^{-x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여

ㄱ에서 $\sqrt{2}-1<x_1<1$이므로

$2^{-1}<y_1<2^{-(\sqrt{2}-1)}$ …… ㉠

ㄴ에서 $1<x_2<\sqrt{2}$이므로

$2^{-\sqrt{2}}<y_2<2^{-1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$2^{-1}-2^{-1}<y_1-y_2<2^{-(\sqrt{2}-1)}-2^{-\sqrt{2}}$

이때

$$\begin{aligned}2^{-(\sqrt{2}-1)}-2^{-\sqrt{2}}&=2^{1-\sqrt{2}}-2^{-\sqrt{2}}\\&=2\times2^{-\sqrt{2}}-2^{-\sqrt{2}}\\&=(2-1)\times2^{-\sqrt{2}}\\&=2^{-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

이므로 $0<y_1-y_2<2^{-\sqrt{2}}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

3 $a>2^b-1$에서 $2^b<a+1$, 즉 $b<\log_2(a+1)$이므로 두 부등식 $a\log_2 n+b<11$, $a>2^b-1$을 모두 만족시키는 자연수 a, b가 존재하기 위한 조건은 좌표평면에서 부등식

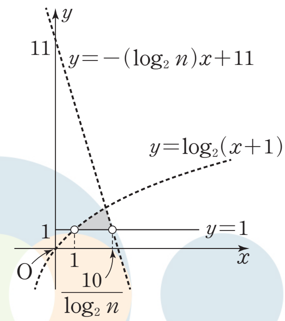
$$\begin{cases}y<-(\log_2 n)x+11\\y<\log_2(x+1)\\x\ge1,\ y\ge1\end{cases}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

을 모두 만족시키고, x좌표와 y좌표가 자연수인 점 $(x,\ y)$가 존재하기 위한 조건과 같다.

곡선 $y=\log_2(x+1)$은 점 $(1,\ 1)$을 지나며, 직선 $y=-(\log_2 n)x+11$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 좌표는 $1=-(\log_2 n)x+11$에서

$x=\frac{10}{\log_2 n}$이므로 $\left(\frac{10}{\log_2 n},\ 1\right)$이다.

따라서 부등식 ㉠의 영역은 그림의 색칠된 부분과 같다.



부등식 ㉠을 만족시키고 x좌표와 y좌표가 자연수인 점 $(x,\ y)$가 존재하려면 $2<\frac{10}{\log_2 n}$이어야 한다.

$\log_2 n<5$, 즉 $n<2^5$에서 $n<32$

따라서 구하는 두 자리의 자연수 n은 10부터 31까지의 자연수이므로 그 개수는 22이다.

답 22

참고

$10\le n<100$이므로 $1=\frac{10}{\log_2 2^{10}}<\frac{10}{\log_2 n}$이다.

따라서 직선 $y=-(\log_2 n)x+11$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표인 $\frac{10}{\log_2 n}$은 1보다 크다.

다른 풀이

$a\log_2 n+b<11$에서

$\log_2 n^a<11-b$이므로 $n^a<2^{11-b}$ …… ㉠

한편, $a>2^b-1$에서

(i) $a=1$이면 $1>2^b-1$을 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$이면 $2>2^b-1$에서 $b=1$이므로

㉠에서 $n^2<2^{10}$

위의 식을 만족시키는 두 자리의 자연수 n은

10, 11, 12, $\cdots$, 31

(iii) $a=3$이면 $3>2^b-1$에서 $b=1$이므로

㉠에서 $n^3<2^{10}$

위의 식을 만족시키는 두 자리의 자연수 n은 10

(iv) $a\geq4$이면 $n^a\geq n^4$, $2^{11-b}\leq2^{10}$

이때 $n^4<2^{10}$을 만족시키는 두 자리의 자연수 n은 존재하지 않으므로 ㉠을 만족시키는 두 자리의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 두 자리의 자연수 n은 10, 11, 12, $\cdots$, 31이고, 그 개수는 22이다.

02 지수함수와 로그함수의 도함수

유제 본문 17~23쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ④ 4 ① 5 ③
6 ② 7 ⑤ 8 ③

1 $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+2}-3^x}{2^x-3^{x+1}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\times2^x-3^x}{2^x-3\times3^x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1-3\times\left(\frac{3}{2}\right)^x}$

$=\frac{4-0}{1-3\times0}$

$=4$

답 ⑤

2 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x^2)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(2x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x^2-\log_2\frac{1}{x}}{\log_2 2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\log_2 x-(-\log_2 x)}{\log_2 2+\log_2 x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\log_2 x}{1+\log_2 x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\frac{1}{\log_2 x}+1}$

$=\frac{3}{0+1}=3$

답 ⑤

3 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2+ax}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x(x+a)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{x+a}\right)$

$=1\times\frac{2}{0+a}$

$=\frac{2}{a}$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x^2+ax}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2}{a}=\frac{1}{2}$에서

$a=4$

답 ④

4 $\lim_{x\to\infty}[x\{\log_3(1+2x)-\log_3 2x\}]$

$=\lim_{x\to\infty}\left(x\log_3\frac{1+2x}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\log_3\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\log_3\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}$

$=\frac{1}{2}\times\log_3 e$

$=\frac{1}{2\ln 3}$

답 ①

5 $f(x)=a+xe^x$에서

$f'(x)=e^x+xe^x$

$2f(1)-f'(1)=2(a+e)-(e+e)=2a$이고

$2f(1)-f'(1)=6$이므로

$2a=6$

따라서 $a=3$

답 ③

6 $f(x)=(x^2+ax+2)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+2)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+(a+2)\}e^x$

$\{x^2+(a+2)x+(a+2)\}e^x=0$에서 $e^x>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 해는 이차방정식 $x^2+(a+2)x+(a+2)=0$의 해와 같다.

이차방정식 $x^2+(a+2)x+(a+2)=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식의 실근이 존재하기 위한 조건은

$D=(a+2)^2-4(a+2)\geq0$

$(a+2)(a-2)\geq0$

따라서 $a\leq-2$ 또는 $a\geq2$이므로 구하는 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

7 $f(x)=x^2\ln 2x$에서

$f(x)=x^2(\ln x+\ln 2)$

$f'(x)=2x(\ln x+\ln 2)+x^2\times\dfrac{1}{x}$

$=x+2x\ln 2x$

$f'(2)=2+4\ln 2^2$

$=2+8\ln 2$

답 ⑤

8 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x^2-x-2}$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이므로

(분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $f(2)=2$이므로 $f(2)=2\log_a 2=2$, $\log_a 2=1$에서

$a=2$

따라서 $f(x)=x\log_2 x$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+1}\times\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\dfrac{1}{3}f'(2)$

$f(x)=x\log_2 x$에서

$f'(x)=\log_2 x+x\times\dfrac{1}{x\ln 2}$

$=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}$

$f'(2)=\log_2 2+\dfrac{1}{\ln 2}$

$=1+\dfrac{1}{\ln 2}$

즉, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{\ln 2}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\ln 2}$이므로

$b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a+b=2+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 24쪽

1 8 2 ② 3 ③ 4 ③ 5 ④

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}{\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}$

에서 분자와 분모를 각각 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$으로 나누면

(주어진 식) $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}{\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}$

$=\dfrac{2+\frac{1}{3}\times 0}{\frac{1}{4}+0}$

$=8$

답 8

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-1}=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+4x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{f(x)}{e^x-1}\times\dfrac{e^x-1}{x}\times\dfrac{x}{\ln(1+4x)}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-1}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+4x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-1}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\times\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\ln(1+4x)}$

$=2\times 1\times\dfrac{1}{4}\times 1$

$=\dfrac{1}{2}$

답 ②

3 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{(2x-\pi)f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$에서 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면

$x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{(2x-\pi)f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{t\to 0}2tf(t)$

$=2\lim\limits_{t\to 0}\left\{f(t)\ln(1+2t)\times\dfrac{t}{\ln(1+2t)}\right\}$

$=2\lim\limits_{t\to 0}\{f(t)\ln(1+2t)\}\times\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\ln(1+2t)}$

주어진 조건에서 $\lim_{x\to0}\{f(x)\ln(1+2x)\}=1$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{(2x-\pi)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=2\times1\times\frac{1}{2}\times1=1$$

답 ③

4 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\ln b$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(1+h)-1\}=0$에서 $\lim_{h\to0}f(1+h)=1$이고,

$1+h=x$라 하면 $h\to0$일 때 $x\to1$이므로

$\lim_{h\to0}f(1+h)=\lim_{x\to1}f(x)=1$

함수 $f(x)=2^x+a\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=1$

$f(1)=2+a\times\frac{1}{2}=1$에서

$a=-2$

$f(x)=2^x-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서

$f'(x)=2^x\ln2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-1}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\&=f'(1)\\&=2\ln2-2\times\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\\&=2\ln2+\ln2\\&=3\ln2\end{aligned}$$

$\ln b=3\ln2$에서 $\ln b=\ln2^3=\ln8$이므로

$b=8$

따라서 $a+b=(-2)+8=6$

답 ③

5 $f(x)=(x^2-3x-3)e^x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x-3)e^x+(x^2-3x-3)e^x\\&=(x^2-x-6)e^x\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기 $m(a)$가 음수이어야 하므로

$m(a)=f'(a)=(a^2-a-6)e^a<0$

$e^a>0$이므로 $a^2-a-6<0$

$(a+2)(a-3)<0$

따라서 $-2<a<3$이므로 구하는 정수 a의 개수는 4이다.

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 25쪽

1 ③ 2 ③ 3 ① 4 ⑤

1 $\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2x-4}}$에서 $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2x-4}}&=\lim_{x\to2}\{1+(x-2)\}^{\frac{1}{2(x-2)}}\\&=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}\\&=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{1}{2}}\\&=e^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{e}\end{aligned}$$

답 ③

2 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+a)-2}{x} & (x>0)\\ x^2-3x+b & (x\le0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)$이다.

$f(0)=\lim_{x\to0-}f(x)=b$이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+a)-2}{x}=b$$

위의 식에서 $x\to0+$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to0+}\{\ln(x+a)-2\}=\ln a-2=0$에서 $a=e^2$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}f(x)&=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+e^2)-2}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+e^2)-\ln e^2}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^2}\right)}{x}\end{aligned}$$

$\frac{x}{e^2}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{e^2 t}$$
$$=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=\frac{1}{e^2}\times 1$$
$$=\frac{1}{e^2}$$

따라서 $b=\frac{1}{e^2}$이므로

$ab=e^2\times\frac{1}{e^2}=1$

답 ③

3 $\ln ex\le f(x)\le e^{x-1}$에서

$x>1$일 때, $\frac{\ln ex-1}{x-1}\le\frac{f(x)-1}{x-1}\le\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ …… ㉠

$0<x<1$일 때, $\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\le\frac{f(x)-1}{x-1}\le\frac{\ln ex-1}{x-1}$ …… ㉡

$g(x)=\ln ex$, $h(x)=e^{x-1}$으로 놓으면

$g(x)=1+\ln x$에서

$g'(x)=\frac{1}{x}$

$h(x)=\frac{1}{e}\times e^x$에서

$h'(x)=\frac{1}{e}\times e^x$

한편,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln ex-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)=1$$

이고, ㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\ln ex-1}{x-1}\le\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-1}{x-1}\le\lim_{x\to 1+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1},$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\le\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-1}{x-1}\le\lim_{x\to 1-}\frac{\ln ex-1}{x-1}$$ 이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=1$$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}$$
$$=1\times\frac{1}{1+2}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ①

4 $2+f(x)\ln(1+2x)=2e^{3x}$에서

$x\ne 0$이면 $f(x)=\frac{2e^{3x}-2}{\ln(1+2x)}$

이때 함수 $f(x)$가 열린 구간 $\left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)$에서 연속이므로

$x=0$에서 연속이다.

따라서

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{3x}-2}{\ln(1+2x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{3x}-1)}{\ln(1+2x)}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{3x}-1}{x}\times\frac{x}{\ln(1+2x)}\right\}$$
$$=2\times 3\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(1+2x)}$$
$$=2\times(3\times 1)\times\left(\frac{1}{2}\times 1\right)$$
$$=3$$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 ④ 2 7 3 ① 4 18

1 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2^t-1)$에 대하여

직선 OP의 기울기는 $\frac{2^t-1}{t}$

직선 OP에 수직인 직선 l의 기울기를 $m(t)$라 하면

$\frac{2^t-1}{t}\times m(t)=-1$에서 $m(t)=-\frac{t}{2^t-1}$이므로

직선 l의 방정식은

$$y-(2^t-1)=-\frac{t}{2^t-1}(x-t)$$

따라서 직선 l의 y절편은

$$f(t)=(2^t-1)+\frac{t^2}{2^t-1}$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1}{t}+\lim_{t\to0+}\frac{t^2}{t(2^t-1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{2^t-1}{t}+\lim_{t\to0+}\frac{1}{\frac{2^t-1}{t}}$$

$$=\ln 2+\frac{1}{\ln 2}$$

답 ④

2 조건 (가)의 $\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{f(x)-1}=\frac{1}{3}$에서 $x\to1$일 때

(분자)$\to0$이고 극한값이 0이 아니므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=1$

함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{f(x)-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}}{\frac{f(x)-1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\times\frac{e^{2(x-1)}-1}{2(x-1)}}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$

$$=\frac{2\times1}{f'(1)}$$

$$=\frac{2}{f'(1)}$$

따라서 $\frac{2}{f'(1)}=\frac{1}{3}$이므로

$f'(1)=6$

조건 (나)의 $f(x)g(x)=\ln x$에서

$f(1)g(1)=0$이고 $f(1)=1$이므로

$g(1)=0$

$f(x)g(x)=\ln x$의 양변을 미분하면

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\frac{1}{x}$$

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=1$

$6\times0+1\times g'(1)=1$이므로

$g'(1)=1$

따라서 $f'(1)+g'(1)=6+1=7$

답 7

3 함수 $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^x & (x>-3)\\ b & (x\le-3)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 연속이고 $f'(-3)$이 존재한다.

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-3+}(x+a)e^x=\lim_{x\to-3-}b=b$에서

$b=(a-3)e^{-3}$ ······ ㉠

$f'(-3)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to-3+}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\to-3-}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}\text{에서}$$

$$\lim_{x\to-3+}\frac{(x+a)e^x-b}{x+3}=\lim_{x\to-3-}\frac{b-b}{x+3}=0$$

㉠에서 $b=(a-3)e^{-3}$이므로

$$\lim_{x\to-3+}\frac{(x+a)e^x-(a-3)e^{-3}}{x+3}=0$$

$x+3=t$로 놓으면 $x\to-3+$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{(t-3+a)e^{t-3}-(a-3)e^{-3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{te^{t-3}+(a-3)e^{t-3}-(a-3)e^{-3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{te^{t-3}+(a-3)e^{-3}(e^t-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}e^{t-3}+(a-3)e^{-3}\lim_{t\to0+}\frac{e^t-1}{t}$$

$=e^{-3}+(a-3)e^{-3}\times1$

$=(a-2)e^{-3}=0$

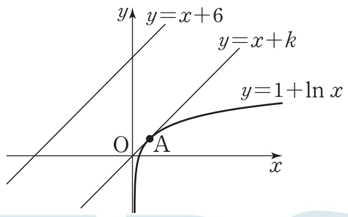
$e^{-3}>0$이므로 $a=2$

㉠에서 $b=(a-3)e^{-3}=-e^{-3}$이므로

$$ab=-2e^{-3}=-\frac{2}{e^3}$$

답 ①

4 그림과 같이 곡선 $y=1+\ln x$에 접하고 기울기가 1인 직선을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하고 직선 $y=x+k$와 곡선 $y=1+\ln x$의 접점을 $\mathrm{A}(a,\ 1+\ln a)$라 하자.



이때 곡선 $y=1+\ln x$ 위의 점과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 직선 $y=x+6$ 사이의 거리와 같다.

$y=1+\ln x$에서

$y'=\frac{1}{x}$

곡선 $y=1+\ln x$ 위의 점 $A(a,\ 1+\ln a)$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$\frac{1}{a}=1$에서 $a=1$이고 $A(1,\ 1)$

점 $A(1,\ 1)$과 직선 $y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-1+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

따라서 $m=3\sqrt{2}$이므로

$m^2=(3\sqrt{2})^2=18$

답 18

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 본문 29~37쪽

1 ①	2 24	3 ④	4 ④	5 ⑤
6 ④	7 ③	8 ④	9 ⑤	

1 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이가 3π이고 넓이가 12π이므로

$\frac{1}{2}\times r\times 3\pi=12\pi$에서

$r=8$

따라서 $8\theta=3\pi$이므로

$\theta=\frac{3\pi}{8}$

답 ①

2 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형 AOB에서

$\overline{OB}=\overline{AB}$이고 $\angle AOB=45°=\frac{\pi}{4}$

$\overline{OB}=\overline{OC}=a$라 하면 직각삼각형 COD에서

$\overline{OD}=\overline{OC}\cos\frac{\pi}{4}=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

구하는 부분의 넓이가 3π이므로

$3\pi=$(부채꼴 OBC의 넓이)$-$(부채꼴 ODE의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{OB}^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times\overline{OD}^2\times\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{8}a^2-\frac{\pi}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{16}a^2$$

즉, $3\pi=\frac{\pi}{16}a^2$에서 $a^2=48$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times\overline{OB}^2=\frac{1}{2}a^2=24$

답 24

3 $6\cos\theta=2\sec\theta-1$에서

$6\cos\theta=\frac{2}{\cos\theta}-1$

$6\cos^2\theta+\cos\theta-2=0$

$(3\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\frac{2}{3}$

따라서

$$\sin\theta\cot\theta-2\cos\theta=\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-2\cos\theta$$
$$=\cos\theta-2\cos\theta$$
$$=-\cos\theta$$
$$=\frac{2}{3}$$

답 ④

4 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}+\frac{9}{16}$

$=\frac{11}{16}$

답 ④

5 $f(x)=2\cos\pi(x-a)+1$에 대하여 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 그래프에서

$b=2$이고 $c=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$

$x=a$에서 $\cos\pi(x-a)=\cos 0=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값 3을 갖는다.

주어진 그래프에서 $x=\cdots,\ -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{3},\ \cdots$일 때 함수 $f(x)$는 최댓값 3을 갖고 $0<a<1$이므로 $a=\frac{2}{3}$이다.

따라서 $a+b+c=\frac{2}{3}+2+\frac{10}{3}=6$

답 ⑤

6 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

따라서

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\tan(\pi-\theta)$

$=\cot\theta-(-\tan\theta)$

$=\cot\theta+\tan\theta$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=4$

답 ④

7 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-\cos\theta$

$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{3}{4}$에서

$\sin\theta=-\frac{4}{3}\cos\theta$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\cos^2\theta+\frac{16}{9}\cos^2\theta$

$=\frac{25}{9}\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{9}{25}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta<0$

따라서 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$

답 ③

다른 풀이

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서

$1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=\csc^2\theta$

$\sin^2\theta=\frac{1}{\csc^2\theta}=\frac{16}{25}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\sin\theta$

$=\cot\theta\times\sin\theta$

$=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{4}{5}$

$=-\frac{3}{5}$

따라서 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$

8 x에 대한 이차방정식 $6x^2+(4\sin\theta)x-\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta)^2-6(-\cos\theta)=4\sin^2\theta+6\cos\theta\geq0$

이어야 한다.

$4(1-\cos^2\theta)+6\cos\theta\geq0$

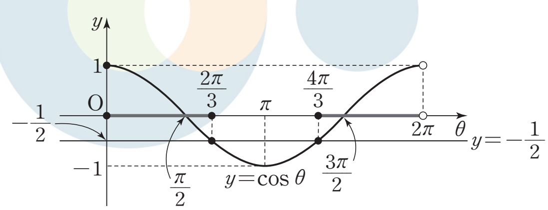
$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2\leq0$

$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-2)\leq0$

$\cos\theta-2<0$이므로 $2\cos\theta+1\geq0$

$\cos\theta\geq-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$0\leq\theta<2\pi$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $0\leq\theta<2\pi$에서 부등식 ㉠의 해는

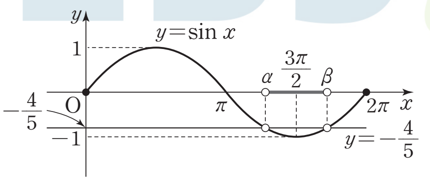
$0\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3}\leq\theta<2\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

답 ④

9 $5\sin x+4<0$에서 $\sin x<-\frac{4}{5}$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{4}{5}$는 그림과 같다.



$0\le x\le 2\pi$에서 부등식 $5\sin x+4<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{4}{5}$가 만나는 두 점의 x좌표는 각각 α, β $(\pi<\alpha<\beta<2\pi)$임을 알 수 있다.

이때 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3\pi}{2}$이므로

$\alpha+\beta=3\pi$

따라서 $\sec\frac{\alpha+\beta}{9}=\sec\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=2$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 38쪽

1 ①	2 ②	3 9	4 ③	5 ⑤

1 $\tan\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{7\pi}{6}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{6}-\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

답 ①

2 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$f(x)=2\sin^2 x-\cos x-1$

$=2(1-\cos^2 x)-\cos x-1$

$=-2\cos^2 x-\cos x+1$

$=-2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

이때 $0\le x\le\pi$에서 $-1\le\cos x\le 1$이므로 함수 $f(x)$는

$\cos x=-\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{9}{8}$,

$\cos x=1$일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{9}{8}+(-2)=-\frac{7}{8}$

답 ②

3 그림에서 함수 $y=a\sin bx$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 6을 갖고 함수 $y=a\sin bx$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$x=-\frac{\pi}{3}$에서 최솟값 -6을 갖는다.

$-1\le\sin bx\le 1$이고 $a>0$이므로

$-a\le a\sin bx\le a$에서 $a=6$

$b>0$이므로 함수 $y=a\sin bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다.

그런데 주어진 그림에서 함수 $y=a\sin bx$의 주기는

$\frac{\pi}{3}\times 4=\frac{4\pi}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{4\pi}{3}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $ab=6\times\frac{3}{2}=9$

답 9

4 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)+1=-2\sin 3x+1$에서

ㄱ. $f\left(\frac{\pi}{9}\right)=-2\sin\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)+1$

$=-2\sin\frac{\pi}{3}+1$

$=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$=1-\sqrt{3}$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)=-2\sin 3x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$이다. (거짓)

ㄷ. $-1 \le \sin 3x \le 1$에서

$-2 \le -2\sin 3x \le 2$

$-1 \le -2\sin 3x + 1 \le 3$

$-1 \le f(x) \le 3$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

5 $2\sin^2 A + 5\cos A + 1 = 0$에서

$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$이므로

$2(1-\cos^2 A)+5\cos A+1=0$

$2\cos^2 A - 5\cos A - 3 = 0$

$(2\cos A+1)(\cos A-3)=0$

$\cos A = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos A = 3$

A는 삼각형 ABC의 한 내각의 크기이므로

$0 < A < \pi$

따라서 $-1 < \cos A < 1$이므로

$\cos A = -\frac{1}{2}$, $A = \frac{2\pi}{3}$

이때 $A+B+C=\pi$이므로

$B+C = \pi - A = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

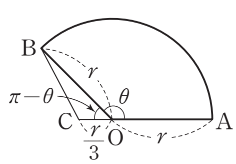
$\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 39쪽

1 ④ 2 ① 3 40 4 ②

1



부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2\theta$ ...... ㉠

$\overline{OC} = \frac{1}{3}\overline{OA} = \frac{r}{3}$

삼각형 COB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{r}{3} \times r \times \sin(\pi-\theta) = \frac{1}{6}r^2 \sin\theta$ ...... ㉡

부채꼴 OAB의 넓이가 삼각형 COB의 넓이의 6배이므로

㉠, ㉡에서

$\frac{1}{2}r^2\theta = 6 \times \frac{1}{6}r^2 \sin\theta$

$\frac{\theta}{2} = \sin\theta$

따라서 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{1}{2}$

답 ④

2 $\cos^2 x + (a+3)\sin x - (3a+1) > 0$ ...... ㉠

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로

$1-\sin^2 x + (a+3)\sin x - (3a+1) > 0$

$-\sin^2 x + (a+3)\sin x - 3a > 0$

$\sin^2 x - (a+3)\sin x + 3a < 0$

$(\sin x - 3)(\sin x - a) < 0$

$-1 \le \sin x \le 1$에서 $\sin x - 3 < 0$이므로

$\sin x - a > 0$

$\sin x > a$

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면

$\sin x \ge -1$이므로 $a < -1$이어야 한다.

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -2이다.

답 ①

3 $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$에서 $\frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3}$이므로

$\tan\frac{\pi}{6} \le \tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le \tan\frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \le \tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le \sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \le g(x) \le \sqrt{3}$

$g(x)=t$라 하면 $3^{-\frac{1}{2}} \le t \le 3^{\frac{1}{2}}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = \log_3 t + 2$

$\log_3 3^{-\frac{1}{2}}+2\leq\log_3 t+2\leq\log_3 3^{\frac{1}{2}}+2$

$-\frac{1}{2}+2\leq\log_3 t+2\leq\frac{1}{2}+2$

$\frac{3}{2}\leq(f\circ g)(x)\leq\frac{5}{2}$

따라서 $M=\frac{5}{2}$이고 $m=\frac{3}{2}$이므로

$10(M+m)=10\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=40$

답 40

4 직선 $y=ax+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로

$\tan\theta=a$

$$\frac{1-\cos(\pi-\theta)}{\sin\theta}+\frac{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{\sin(\pi+\theta)}$$

$$=\frac{1-(-\cos\theta)}{\sin\theta}+\frac{1+\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}}{-\sin\theta}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2}{\tan\theta}=3$$

따라서 $a=\tan\theta=\frac{2}{3}$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 40쪽

1 128 **2** 4 **3** ③ **4** 9

1 부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{3\pi}{4}$이고 호 AB의 길이가 3π이므로 반지름의 길이를 r라 하면

$r\times\frac{3\pi}{4}=3\pi$에서

$r=\overline{OA}=4$

$\angle AOP=\frac{1}{3}\angle AOB=\frac{\pi}{4}$이므로

사각형 PABQ의 넓이 S는

$S=3\times\triangle AOP-\triangle AOB$

$=3\times\left(\frac{1}{2}\times4^2\times\sin\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\times4^2\times\sin\frac{3\pi}{4}$

$=24\sin\frac{\pi}{4}-8\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=24\sin\frac{\pi}{4}-8\sin\frac{\pi}{4}$

$=16\sin\frac{\pi}{4}$

$=16\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=8\sqrt{2}$

따라서 $S^2=(8\sqrt{2})^2=128$

답 128

2 $0\leq\theta\leq\pi$에서 $\cos\theta=t$ $(-1\leq t\leq1)$이라 하면

$f(\theta)=2\sin^2\theta+2a\cos\theta-2$

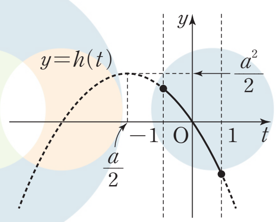
$=2(1-\cos^2\theta)+2a\cos\theta-2$

$=-2\cos^2\theta+2a\cos\theta$

$=-2t^2+2at$ $(-1\leq t\leq1)$

따라서 $h(t)=-2t^2+2at=-2\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}$이라 하면 $-1\leq t\leq1$에서 함수 $h(t)$의 최댓값 $g(a)$는 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $\frac{a}{2}\leq-1$, 즉 $a\leq-2$일 때



함수 $h(t)$는 $t=-1$일 때 최대이므로

$g(a)=h(-1)=-2a-2$

$g(a)=a+4$에서

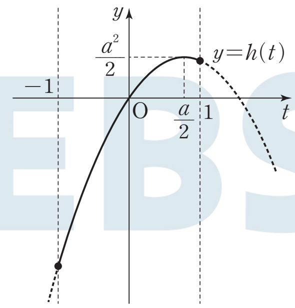
$-2a-2=a+4$

$3a=-6$

$a=-2$

$a\le-2$이므로 $a=-2$는 조건을 만족시킨다.

(ii) $-1<\frac{a}{2}\le1$, 즉 $-2<a\le2$일 때



함수 $h(t)$는 $t=\frac{a}{2}$일 때 최대이므로

$g(a)=h\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$

$g(a)=a+4$에서

$\frac{a^2}{2}=a+4$

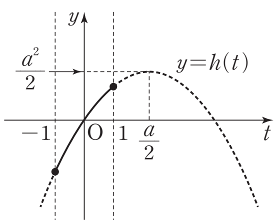
$a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$a=-2$ 또는 $a=4$

$-2<a\le2$이므로 조건을 만족시키는 a는 없다.

(iii) $\frac{a}{2}>1$, 즉 $a>2$일 때



함수 $h(t)$는 $t=1$일 때 최대이므로

$g(a)=h(1)=2a-2$

$g(a)=a+4$에서

$2a-2=a+4$

$a=6$

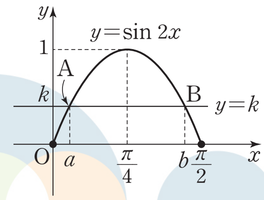
$a>2$이므로 $a=6$은 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-2+6=4$

답 4

3 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, $b(a<b)$라 하자.

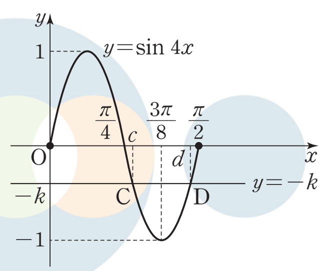


[그림 1]

[그림 1]과 같이 두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 서로 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{4}$에서 $a+b=\frac{\pi}{2}$

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프와 직선 $y=-k$가 만나는 두 점을 C, D라 하고 두 점 C, D의 x좌표를 각각 c, $d(c<d)$라 하자.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3\pi}{8}$에 대하여 서로 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=\frac{3\pi}{8}$에서 $c+d=\frac{3\pi}{4}$

따라서 $a+b+c+d=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$이므로

$$\sin(a+b+c+d)=\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

4 $a>0$이고 함수 $y=a\sin(bx-c)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 $a=2$

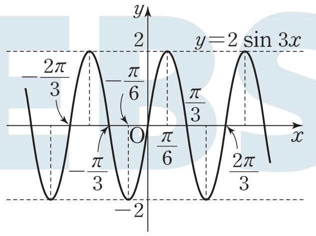
$b>0$이고 함수 $y=a\sin(bx-c)$의 주기가 $\frac{2\pi}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3}$에서 $b=3$

$y=a\sin(bx-c)=2\sin(3x-c)=2\sin\left\{3\left(x-\frac{c}{3}\right)\right\}$

에서 함수 $y=2\sin(3x-c)$의 그래프는 함수 $y=2\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{c}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=2\sin 3x$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y=2\sin 3x$, $y=2\sin(3x-c)$의 그래프를 비교하면 함수 $y=2\sin 3x$의 주기가 $\frac{2\pi}{3}$이고 $0<\frac{c}{3}<\frac{4\pi}{3}$이므로 함수 $y=2\sin(3x-c)$의 그래프는 함수
$y=2\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로
$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}$ 또는 $-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}$만큼 평행이동한 것임을 알 수 있다.

(ⅰ) $\frac{c}{3}=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$이면 $c=\frac{3\pi}{2}$

(ⅱ) $\frac{c}{3}=-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$이면 $c=\frac{7\pi}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $c=\frac{3\pi}{2}$ 또는 $c=\frac{7\pi}{2}$ …… ㉠

$a\cos\left(b\pi-\frac{c}{2}\right)=\sqrt{2}$에서

$2\cos\left(3\pi-\frac{c}{2}\right)=\sqrt{2}$

$\cos\left(\pi-\frac{c}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{c}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0<\frac{c}{2}<2\pi$에서 $\frac{c}{2}=\frac{3\pi}{4}$ 또는 $\frac{c}{2}=\frac{5\pi}{4}$

따라서 $c=\frac{3\pi}{2}$ 또는 $c=\frac{5\pi}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $c=\frac{3\pi}{2}$

따라서 $abc=2\times3\times\frac{3\pi}{2}=9\pi$이므로

$\frac{abc}{\pi}=9$

답 9

참고

㉠을 다음과 같이 구할 수 있다.
$a=2$, $b=3$이고 주어진 함수 $y=a\sin(bx-c)$,
즉 $y=2\sin(3x-c)$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로
$2=2\sin(0-c)=-2\sin c$
$\sin c=-1$
이때 $0<c<4\pi$이므로 $c=\frac{3\pi}{2}$ 또는 $c=\frac{7\pi}{2}$

04 삼각함수의 미분

유제

본문 43~49쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ④ 5 ②
6 ③ 7 ④ 8 ④

1 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2\left(\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2}\right)-2\left(\cos x\times\frac{1}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{3}\sin x+\cos x-\cos x+\sqrt{3}\sin x$$
$$=2\sqrt{3}\sin x$$

$0\le x\le 2\pi$에서 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-2\sqrt{3}\le 2\sqrt{3}\sin x\le 2\sqrt{3}$

즉, $-2\sqrt{3}\le f(x)\le 2\sqrt{3}$

따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이다.

답 ④

2 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $0<A<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고 $0<B<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$$\sin C=\sin(\pi-A-B)$$
$$=\sin\{\pi-(A+B)\}$$
$$=\sin(A+B)$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{9}$$
$$=\frac{3\sqrt{6}}{9}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

답 ⑤

3 두 직선 $y=2x+1$, $y=\frac{1}{3}x-2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 두 직선이 이루는 예각의 크기는 θ이고

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$이므로

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$$
$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}\right|=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$

답 ⑤

4 $(\tan\alpha-1)(\tan\beta+2)=\tan\beta-3$에서

$\tan\alpha\tan\beta+2\tan\alpha-\tan\beta-2=\tan\beta-3$

$\tan\alpha\tan\beta+1=2\tan\beta-2\tan\alpha$

$1+\tan\alpha\tan\beta=2(\tan\beta-\tan\alpha)$

$$\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\tan(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$, $\cot(\beta-\alpha)=2$

$\csc^2(\beta-\alpha)=1+\cot^2(\beta-\alpha)=1+2^2=5$

$\csc(\beta-\alpha)=-\sqrt{5}$ 또는 $\csc(\beta-\alpha)=\sqrt{5}$

이때 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan(\beta-\alpha)>0$이므로

$0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$

따라서 $\csc(\beta-\alpha)=\sqrt{5}$

답 ④

5 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x-a}=b$에서 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분자)$\to 0$이고 $b\neq 0$

이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(e^x-a)=0$에서

$e^{\frac{\pi}{2}}-a=0$, $a=e^{\frac{\pi}{2}}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x-a}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x-e^{\frac{\pi}{2}}}$에서

$x-\frac{\pi}{2}=t$라 하면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{e^x-e^{\frac{\pi}{2}}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{e^{\frac{\pi}{2}+t}-e^{\frac{\pi}{2}}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{e^{\frac{\pi}{2}}\times e^t-e^{\frac{\pi}{2}}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{e^{\frac{\pi}{2}}(e^t-1)}$$
$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{e^t-1}$$
$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}\times\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{e^t-1}{t}}$$
$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{1}$$
$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}=b$$

따라서 $ab=e^{\frac{\pi}{2}}\times(-e^{-\frac{\pi}{2}})=-1$

답 ②

6 실수 $t\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$에 대하여

$\mathrm{A}(t,\ \tan 2t)$, $\mathrm{B}(t,\ \tan t)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2=t^2+\tan^2 2t$

$\overline{\mathrm{OB}}^2=t^2+\tan^2 t$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^2+\tan^2 2t}{t^2+\tan^2 t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1+\left(\frac{\tan 2t}{t}\right)^2}{1+\left(\frac{\tan t}{t}\right)^2}$$

이때

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\tan t}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{\cos t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\cos t}$$
$$=1\times 1=1$$
$$\lim_{t\to 0+}\frac{\tan 2t}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\times\frac{2}{\cos 2t}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin 2t}{2t}\times 2\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\cos 2t}$$
$$=1\times 2=2$$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2}=\frac{1+\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\tan 2t}{t}\right)^2}{1+\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^2}$$
$$=\frac{1+2^2}{1+1^2}=\frac{5}{2}$$

답 ③

7 $f(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$에서

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x$$
$$=2e^x\cos x$$

$f'(x)=0$에서 $e^x\cos x=0$

모든 x에 대하여 $e^x>0$이므로

$0<x<2\pi$에서 $\cos x=0$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3\pi}{2}$이므로 구하는 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi$

답 ④

8 $g(x)=\cos^2 x=\cos x\cos x$라 하면

$$g'(x)=(\cos x)'\cos x+\cos x(\cos x)'$$
$$=-\sin x\cos x-\cos x\sin x$$
$$=-2\sin x\cos x$$
$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(x+2h)-\cos^2 x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+2h)-g(x)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{g(x+2h)-g(x)}{2h}=2g'(x)$$
$$=-4\sin x\cos x$$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+4\sin h}{h^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4\sin h\cos h+4\sin h}{h^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\sin h\,(1-\cos h)}{h^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{4\times\frac{\sin h}{h}\times\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h^2}\times\frac{1}{1+\cos h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{4\times\frac{\sin h}{h}\times\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos h}\right\}$$

$$=4\times 1\times 1^2\times\frac{1}{1+1}=2$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 50쪽

1 ② 2 ① 3 ① 4 ② 5 ④

1 $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

답 ②

2 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서

$0<\alpha+\beta<\pi$

$\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

답 ①

3 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$,

즉 $\lim_{x\to 0}f(x)=a$이다.

$$\lim_{x\to 0}f(x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+3x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\times\frac{x^2}{\ln(1+3x^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\times\frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{\ln(1+3x^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{3x^2}}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1}$$

$$=\frac{1}{6}$$

따라서 $a=\frac{1}{6}$

답 ①

4 $f(x)=\sin x+2\cos x$이므로

$f'(x)=\cos x-2\sin x$

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right\}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$=3f'(x)+f'(x)=4f'(x)$$

$$=4(\cos x-2\sin x)$$

따라서

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2}$$

답 ②

5 $f(x)=2e^x\sin x$에서

$f'(x)=2e^x\sin x+2e^x\cos x$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-2\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2e^x\sin x+2e^x\cos x-2\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2e^x\sin x+2(e^x-1)\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(2e^x\times\frac{\sin x}{x}+2\times\frac{e^x-1}{x}\times\cos x\right)$$

$$=2\lim_{x\to0}e^x\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+2\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\lim_{x\to0}\cos x$$

$=2\times1\times1+2\times1\times1$

$=4$

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 51쪽

1 ④ 2 ① 3 3 4 6 5 ④

1 $2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x+1$에서

$$2\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x+1$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sin x+1$$

$2\cos x+2\sin x=2\sin x+1$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{3}$

따라서

$\beta-\alpha=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

답 ④

2 점 $(2,\ -2)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x-2)-2$

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 직선 $y=m(x-2)-2$가 접하므로 방정식 $ax^2=m(x-2)-2$, 즉

$ax^2-mx+2m+2=0$이 중근을 가져야 한다.

방정식 $ax^2-mx+2m+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4a(2m+2)=0$

$m^2-8am-8a=0$ …… ㉠

방정식 ㉠의 두 실근을 m_1, m_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1+m_2=8a$, $m_1m_2=-8a$

점 $(2,\ -2)$에서 이차함수 $y=ax^2$의 그래프에 그은 두 접선의 기울기가 각각 m_1, m_2이므로 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$

두 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이어야 하므로

$$\tan\frac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|$$

$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

$$=\left|\frac{m_1-m_2}{1-8a}\right|=1$$

$|m_1-m_2|=|1-8a|$에서

$(m_1-m_2)^2=(1-8a)^2$

$(m_1+m_2)^2-4m_1m_2=1-16a+64a^2$

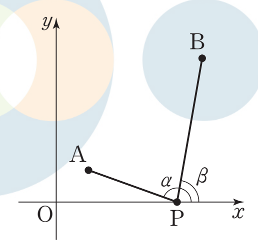
$(8a)^2-4\times(-8a)=1-16a+64a^2$

$48a=1$

따라서 $a=\frac{1}{48}$

답 ①

3



두 직선 PA, PB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\angle\mathrm{APB}=\alpha-\beta$

A(1, 1), B(3, 3), P(t, 0)이므로

$\tan\alpha=\dfrac{1}{1-t}$ (단, $t\neq1$)

$\tan\beta=\dfrac{3}{3-t}$ (단, $t\neq3$)

$$f(t)=\tan(\angle\text{APB})$$
$$=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{3}{3-t}}{1+\dfrac{1}{1-t}\times\dfrac{3}{3-t}}$$
$$=\frac{2t}{(1-t)(3-t)+3}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\tan t}{f(t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\tan t}{t}\times\frac{(1-t)(3-t)+3}{2}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{\cos t}\times\frac{(1-t)(3-t)+3}{2}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to0+}\frac{1}{\cos t}\times\lim_{t\to0+}\frac{(1-t)(3-t)+3}{2}$$
$$=1\times1\times\frac{3+3}{2}$$
$$=3$$

답 3

4 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}=3$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$

$1-\cos x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때, $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=f'(0)\times1^2\times\frac{1}{2}=\frac{f'(0)}{2}=3$$

따라서 $f'(0)=6$

답 6

5 $f(x)=c-4\sin^2 x$, $g(x)=4\cos x$라 하면

$$f'(x)=(c-4\sin x\sin x)'$$
$$=-4\{(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'\}$$
$$=-8\sin x\cos x$$

$g'(x)=-4\sin x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 (a, b)에서의 접선이 서로 같으려면

$f(a)=g(a)=b$, $f'(a)=g'(a)$

가 성립해야 한다.

$f'(a)=g'(a)$에서

$-8\sin a\cos a=-4\sin a$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin a\neq0$이므로

$\cos a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{\pi}{3}$

$f(a)=g(a)=b$이므로

$b=g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2$이고

$$b=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=c-4\sin^2\frac{\pi}{3}$$
$$=c-4\times\frac{3}{4}=c-3=2$$

$c=3+2=5$

따라서 $a+b+c=\dfrac{\pi}{3}+2+5=7+\dfrac{\pi}{3}$

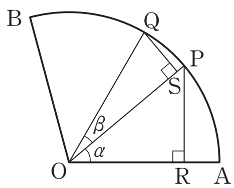
답 ④

Level 3 실력 완성

본문 52쪽

1 ③	2 9	3 ①	4 ③

1



$\angle POA=\alpha$, $\angle QOP=\beta$라 하면

직각삼각형 POR에서 $\overline{OP}=2$이므로

$\overline{OR}=2\cos\alpha$, $\overline{PR}=2\sin\alpha$

직각삼각형 QOS에서 $\overline{OQ}=2$이므로

$\overline{OS}=2\cos\beta$, $\overline{QS}=2\sin\beta$

$\overline{PR}\times\overline{OS}+\overline{OR}\times\overline{QS}=2\sqrt{3}$에서

$2\sin\alpha\times2\cos\beta+2\cos\alpha\times2\sin\beta$

$=4(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=4\sin(\alpha+\beta)=2\sqrt{3}$

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0<\alpha+\beta<\dfrac{7\pi}{12}$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $\angle BOQ=\dfrac{7\pi}{12}-(\alpha+\beta)=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}$

답 ③

2 $g(x)=x\sin x+f(x)$에서

$g'(x)=\sin x+x\cos x+f'(x)$

조건 (가) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)}{x}=8$에서

$8=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x\cos x+f'(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x+\dfrac{f'(x)}{x}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\cos x+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}$

$=1+1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=6$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=6$에서 $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$

다항함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$ …… ㉡

조건 (나) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^3}=4$에서

$4=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x+f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^3}\right\}$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{\sin x}{x^2}\le\dfrac{1}{x^2}$ $(x\ne0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$에서

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}=0$

$4=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$

$=0+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=4$에서 다항함수 $f(x)$는 삼차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=12x^2+2ax+b$

㉡에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

㉠에서

$6=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12x^2+2ax}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}(12x+2a)=2a$

$2a=6$, $a=3$

$f(x)=4x^3+3x^2+c$

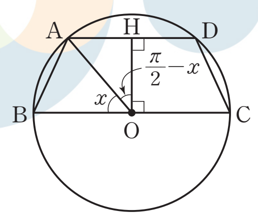
$f(0)=2$에서 $c=2$

따라서 $f(x)=4x^3+3x^2+2$이므로

$f(1)=4+3+2=9$

답 9

3



사각형 AOCD의 넓이 $f(x)$는 사다리꼴 ABCD의 넓이에서 삼각형 ABO의 넓이를 뺀 값과 같다.

원의 중심 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AD}=2\overline{AH}$

$\overline{AH}=\overline{OA}\sin(\angle AOH)$

$\quad=\overline{OA}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\quad=\cos x$

$\overline{OH}=\overline{OA}\cos(\angle AOH)$

$\quad=\overline{OA}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\quad=\sin x$

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{BC}+\overline{AD})\times\overline{OH}=\frac{1}{2}(2+2\cos x)\sin x$

$\quad=(1+\cos x)\sin x$

$\quad=\sin x+\sin x\cos x$

또한 삼각형 ABO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin x=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin x$

$\quad=\frac{1}{2}\sin x$

따라서 구하는 사각형 AOCD의 넓이 $f(x)$는

$f(x)=\sin x+\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

$\quad=\frac{1}{2}\sin x+\sin x\cos x$

이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$

따라서

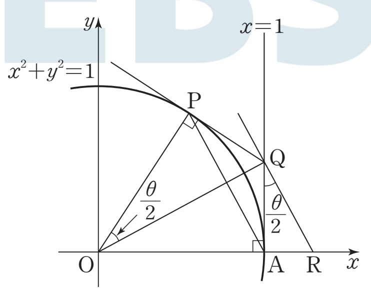
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}$

$\quad=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\quad=\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 ①

4



점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $\overline{OP}=1$

$\overline{OP}=\overline{OA}$, $\angle OPQ=\angle OAQ=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OQ}$는 공통이므로 두 삼각형 OPQ, OAQ는 합동이다.

$\angle POQ=\angle QOA=\frac{\theta}{2}$

$\overline{PQ}=\overline{QA}=\tan\frac{\theta}{2}$

직각삼각형 OPQ에서

$\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2=1+\tan^2\frac{\theta}{2}$

이때 세 점 O, A, P를 지나는 원에 대하여 두 점 A, P가 원 위의 점이고 $\angle OPQ=\angle OAQ=\frac{\pi}{2}$이므로 이 원은 점 Q도 지난다. 또한 $\angle OPQ=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 OQ는 세 점 O, A, P를 지나는 원의 지름이 된다.

따라서 구하는 원의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\pi\times\left(\frac{\overline{OQ}}{2}\right)^2$

$\quad=\frac{\pi}{4}\times\overline{OQ}^2$

$\quad=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\tan^2\frac{\theta}{2}$

두 직선 PA, QR가 평행하므로

$\angle OQR=\frac{\pi}{2}$

이때 $\angle QOA=\angle AQR=\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{AR}=\overline{QA}\times\tan\frac{\theta}{2}$

$\quad=\tan\frac{\theta}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}$

$\quad=\tan^2\frac{\theta}{2}$

따라서 직각삼각형 QAR의 넓이 $g(\theta)$는

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QA}\times\overline{AR}$

$\quad=\frac{1}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}\times\tan^2\frac{\theta}{2}$

$\quad=\frac{1}{2}\tan^3\frac{\theta}{2}$

이므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\left\{f(\theta)-\frac{\pi}{4}\right\}}{g(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\tan^2\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}\tan^3\frac{\theta}{2}}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\frac{\pi}{4}\tan^2\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}\tan^3\frac{\theta}{2}}$$

$$=\pi\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\pi\times\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\pi\times\frac{1}{\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}}\times\lim_{\theta\to0+}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\pi\times\frac{1}{1}\times1$$

$$=\pi$$

답 ③

05 여러 가지 미분법

유제 본문 55~63쪽

1 ②	2 6	3 84	4 ④	5 24
6 ②	7 ②	8 36	9 20	10 ③

1 $f(x)=\frac{x^2+7}{x-5}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2+7)'\times(x-5)-(x^2+7)\times(x-5)'}{(x-5)^2}$

$=\frac{2x\times(x-5)-(x^2+7)\times1}{(x-5)^2}$

$=\frac{2x^2-10x-x^2-7}{(x-5)^2}$

$=\frac{x^2-10x-7}{(x-5)^2}$

$x\neq5$에서 $x-5\neq0$이므로

$f(x)+(x-5)f'(x)$

$=\frac{x^2+7}{x-5}+(x-5)\times\frac{x^2-10x-7}{(x-5)^2}$

$=\frac{x^2+7}{x-5}+\frac{x^2-10x-7}{x-5}$

$=\frac{2x^2-10x}{x-5}$

$=\frac{2x(x-5)}{x-5}=2x$

따라서 $a=2$, $b=0$이므로

$a+b=2+0=2$

답 ②

다른 풀이

$f(x)=\frac{x^2+7}{x-5}$에서 $x-5\neq0$이므로

$(x-5)f(x)=x^2+7$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-5)f'(x)=2x$ …… ㉡

㉡은 $x\neq5$인 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $a=2$, $b=0$

따라서 $a+b=2+0=2$

2 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$에서

$g'(x)=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}=-\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^2}$

$g(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$에서 $b=3$

$g'(0)=-\frac{a}{b^2}=\frac{2}{9}$에서 $a=-\frac{2}{9}b^2$

$b=3$이므로 $a=-\frac{2}{9}\times3^2=-2$

따라서 $f(x)=x^2-2x+3$이므로

$f(3)=3^2-2\times3+3=6$

답 6

다른 풀이

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$에서 $f(x)g(x)=1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)g(0)=1$

$g(0)=\frac{1}{3}$이므로 $f(0)=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=0$

$f'(0)\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{9}=0$

$f'(0)=-2$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=2x+a$

$f(0)=b=3$

$f'(0)=a=-2$

따라서 $f(x)=x^2-2x+3$이므로

$f(3)=3^2-2\times3+3=6$

3 $f(x)=6\tan x\sec x$에서

$f'(x)=6\{(\tan x)'\times\sec x+\tan x\times(\sec x)'\}$

$=6(\sec^2 x\times\sec x+\tan x\times\sec x\tan x)$

$=6(\sec^3 x+\tan^2 x\sec x)$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=6\left(\sec^3\frac{\pi}{3}+\tan^2\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}\right)$

$=6\{2^3+(\sqrt{3})^2\times2\}$

$=6(8+6)$

$=6\times14=84$

답 84

4 $f(x)=2\sec x-\tan x$에서

$f'(x)=2\sec x\tan x-\sec^2 x$

$f'(x)=0$에서

$2\sec x\tan x-\sec^2 x=0$

$\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}=0$ …… ㉠

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x\neq0$이므로 ㉠의 양변에 $\cos^2 x$를 곱하면

$2\sin x-1=0$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$

답 ④

5 $f(x)=\dfrac{1}{(3x-2)^2}=(3x-2)^{-2}$에서 $f(1)=1$이고,

$f'(x)=(-2)\times(3x-2)^{-2-1}\times(3x-2)'$

$=-2(3x-2)^{-3}\times3$

$=-\dfrac{6}{(3x-2)^3}$

이므로

$f'(1)=-6$

$h(2x-1)=g(f(x))$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2h'(2x-1)=g'(f(x))f'(x)$

$x=1$을 대입하면

$2h'(1)=g'(f(1))f'(1)$

따라서

$h'(1)=\dfrac{g'(f(1))f'(1)}{2}$

$=\dfrac{g'(1)f'(1)}{2}$

$=\dfrac{(-8)\times(-6)}{2}=24$

답 24

6 $h(x)=f(g(x))$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h'(0)=f'(g(0))g'(0)$

$g(x)=x^{2019}+4x+3$에서 $g(0)=3$이고,

$g'(x)=2019x^{2018}+4$이므로 $g'(0)=4$

$h'(0)=28$이므로 $28=f'(3)\times4$에서

$f'(3)=7$

답 ②

7 $f(x)=\dfrac{ax}{\ln x}$에서

$f'(x)=\left(\dfrac{ax}{\ln x}\right)'$

$=\dfrac{(ax)'\times\ln x-ax\times(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{a\times\ln x-ax\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

$=\dfrac{a(-1+\ln x)}{(\ln x)^2}$

$f'(e^2)=\dfrac{a(-1+\ln e^2)}{(\ln e^2)^2}$

$=\dfrac{a\{(-1)+2\}}{2^2}$

$=\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=2$

답 ②

8 $f(3x-1)=(2^x+2)^4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(3x-1)\times(3x-1)'=4(2^x+2)^3\times(2^x+2)'$

$f'(3x-1)\times3=4(2^x+2)^3\times2^x\times\ln 2$

$3f'(3x-1)=4\ln 2\times2^x(2^x+2)^3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3f'(3\times0-1)=4\ln 2\times2^0(2^0+2)^3=108\ln 2$

따라서 $f'(-1)=36\ln 2$이므로

$k=36$

답 36

9 $f(x)=3e^{2x}+1$에서 $f'(x)=6e^{2x}$

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로

$g(4)=k$에서 $f(k)=4$

$f(x)=3e^{2x}+1$이므로

$3e^{2k}+1=4$

$e^{2k}=1$

그러므로 $k=0$, 즉 $g(4)=0$

$g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{6}$

따라서 $p=\dfrac{1}{6}$이므로

$120p=120\times\dfrac{1}{6}=20$

답 20

10 $f(x)=(ax+b)\sin x$에서

$f'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x$

$f'(0)=1$이므로

$a\sin 0+(a\times 0+b)\cos 0=1$에서

$b=1$

$f'(x)=a\sin x+(ax+1)\cos x$에서

$f''(x)=a\cos x+a\cos x-(ax+1)\sin x$

$\quad\quad=2a\cos x-(ax+1)\sin x$

$f''(0)=4$이므로

$2a\cos 0-(a\times 0+1)\sin 0=4$에서

$2a=4$, 즉 $a=2$

따라서 $a+b=2+1=3$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ①	2 ①	3 1	4 ③	5 ⑤
6 ②	7 ①	8 70		

1 $y=\dfrac{2x+1}{e^x}$에서

$y'=\dfrac{(2x+1)'\times e^x-(2x+1)\times(e^x)'}{(e^x)^2}$

$=\dfrac{2e^x-(2x+1)e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{1-2x}{e^x}$

따라서 곡선 $y=\dfrac{2x+1}{e^x}$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{1-2\times 0}{e^0}=\dfrac{1}{1}=1$

답 ①

2 $g(x)=\{f(x)\}^{-3}$에서

$g'(x)=-3\{f(x)\}^{-4}f'(x)$

따라서

$g'(2)=-3\{f(2)\}^{-4}f'(2)$

$\quad=-3\times 2^{-4}\times 8=-\dfrac{3}{2}$

답 ①

다른 풀이

$g(x)=\{f(x)\}^{-3}=\dfrac{1}{\{f(x)\}^3}$에서

$g'(x)=-\dfrac{[\{f(x)\}^3]'}{\{f(x)\}^6}$

$\quad=-\dfrac{3\{f(x)\}^2f'(x)}{\{f(x)\}^6}$

$\quad=-\dfrac{3f'(x)}{\{f(x)\}^4}$

따라서

$g'(2)=-\dfrac{3f'(2)}{\{f(2)\}^4}$

$\quad=-\dfrac{3\times 8}{2^4}$

$\quad=-\dfrac{3}{2}$

3 $e^{f(x)}=\sec x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^{f(x)}\times f'(x)=\sec x\tan x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$e^{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}\times f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sec\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{4}$

㉠의 양변에 $x=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$e^{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sec\dfrac{\pi}{4}$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

답 1

다른 풀이

$e^{f(x)}=\sec x$에서 $f(x)=\ln(\sec x)$이므로

$f'(x)=\dfrac{(\sec x)'}{\sec x}=\dfrac{\sec x\tan x}{\sec x}=\tan x$

따라서 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

4 $f(x)=\ln(2x+7)$에서

$f'(x)=\dfrac{(2x+7)'}{2x+7}=\dfrac{2}{2x+7}$이므로

$f'(1)=\dfrac{2}{2+7}=\dfrac{2}{9}$

따라서

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)$

$=2f'(1)$

$=2\times\dfrac{2}{9}$

$=\dfrac{4}{9}$

답 ③

5 $f(0)=f(1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))-f(0)}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))-f(f(1))}{x-1}$

$g(x)=f(f(x))$로 놓으면

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(f(x))-f(f(1))}{x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=g'(1)=f'(f(1))f'(1)$

$=f'(0)f'(1)=4\times(-4)$

$=-16$

답 ⑤

6 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-4}{h}=\frac{1}{3}$에서 $h\to0$일 때, (분모) $\to0$이므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{h\to0}\{f(1+h)-4\}=0$에서 $\displaystyle\lim_{h\to0}f(1+h)=4$이므로

$f(1)=4$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$g(4)=1$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-4}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=f'(1)=\dfrac{1}{3}$

$g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(1)}=3$

따라서 $g(4)+g'(4)=1+3=4$

답 ②

7 곡선 $y=g(x)$가 점 $(e,\ 1)$을 지나므로

$g(e)=1$

$f(x)=xe^x\ (x>0)$에서

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$이므로

$f'(1)=2e$

따라서

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}=g'(e)$

$=\dfrac{1}{f'(g(e))}$

$=\dfrac{1}{f'(1)}$

$=\dfrac{1}{2e}$

답 ①

8 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}x^{-k}$에서

$f'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(-kx^{-k-1})$

$f''(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\{(-k)\times(-k-1)x^{-k-2}\}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k(k+1)x^{-k-2}$

따라서

$$f''(1)=\sum_{k=1}^{5}k(k+1)\times 1^{-k-2}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}k(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=\frac{5\times 6\times 11}{6}+\frac{5\times 6}{2}$$
$$=55+15=70$$

답 70

Level 2 기본 연습 본문 66쪽

1 ④ 2 ④ 3 17 4 3

1 $f(x)=\dfrac{kx^2}{x-1}$에서

$$f'(x)=\frac{(kx^2)'\times(x-1)-kx^2\times(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2kx\times(x-1)-kx^2\times 1}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{kx^2-2kx}{(x-1)^2}$$
$$f'(3)=\frac{9k-6k}{(3-1)^2}=\frac{3k}{4}=3$$

따라서 $k=4$

답 ④

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{kx^2}{x-1}$에서

$(x-1)f(x)=kx^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x)=2kx$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)+2f'(3)=6k$

$f(3)=\dfrac{9k}{2}$이고 $f'(3)=3$이므로

$\dfrac{9k}{2}+6=6k$

$\dfrac{3k}{2}=6$

따라서 $k=4$

2 $g(x)=f(f(x))$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

$f'(x)=3f(x)$이므로

$g'(x)=3f(f(x))\times 3f(x)=9f(x)f(f(x))$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(0)=9f(0)f(f(0))$

따라서 $f(0)=1$이므로

$g'(0)=9\times 1\times f(1)=9f(1)$

답 ④

3 $g(x)=\dfrac{1-\cos f(x)}{1+\cos f(x)}$에서

$g'(x)$

$$=\frac{\{1-\cos f(x)\}'\times\{1+\cos f(x)\}-\{1-\cos f(x)\}\times\{1+\cos f(x)\}'}{\{1+\cos f(x)\}^2}$$
$$=\frac{\sin f(x)\times f'(x)\{1+\cos f(x)\}+\{1-\cos f(x)\}\sin f(x)\times f'(x)}{\{1+\cos f(x)\}^2}$$
$$=\frac{2f'(x)\sin f(x)}{\{1+\cos f(x)\}^2}$$

이므로

$$g'(0)=\frac{2f'(0)\sin f(0)}{\{1+\cos f(0)\}^2}$$
$$=\frac{2\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

그러므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$이다.

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=9+8=17$

답 17

4 $f(x)=(x-1)e^{ax+b}$에서

$f'(x)=(x-1)'\times e^{ax+b}+(x-1)\times(e^{ax+b})'$
$=1\times e^{ax+b}+(x-1)\times e^{ax+b}\times a$
$=e^{ax+b}+a(x-1)e^{ax+b}$
$f'(1)=e$이므로 $e^{a+b}=e$
그러므로 $a+b=1$ …… ㉠
$f''(x)=e^{ax+b}\times a+a\{(x-1)'\times e^{ax+b}$
$+(x-1)\times(e^{ax+b})'\}$
$=ae^{ax+b}+a\{1\times e^{ax+b}+(x-1)\times e^{ax+b}\times a\}$
$=ae^{ax+b}+ae^{ax+b}+a^2(x-1)e^{ax+b}$
$=2ae^{ax+b}+a^2(x-1)e^{ax+b}$
$f''(1)=4e$이므로 $2ae^{a+b}=4e$
$e^{a+b}=e$이므로 $2a=4$
따라서 $a=2$
㉠에서 $b=-1$
따라서 $a-b=2-(-1)=3$

답 3

Level 3 실력 완성 본문 67쪽

1 ② 2 ② 3 41

1 (i) $x=0$일 때, 조건 (가)에 의하여 $\lim_{h\to0}f(h)=2$,
$f(0)=1$이므로 미분계수의 정의에 의하여
함수 $g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$$g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{f(h)+1}-\frac{0}{f(0)+1}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{f(h)+1}-\frac{0}{1+1}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{f(h)+1}$$
$$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

(ii) $x\neq0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$을 제외한 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$g(x)=\dfrac{x}{f(x)+1}$에서

$$g'(x)=\left\{\frac{x}{f(x)+1}\right\}'$$
$$=\frac{x'\times\{f(x)+1\}-x\times\{f(x)+1\}'}{\{f(x)+1\}^2}$$
$$=\frac{f(x)+1-xf'(x)}{\{f(x)+1\}^2}$$

조건 (나)에 의하여 $f(1)=f'(1)=1$이므로

$$g'(1)=\frac{f(1)+1-f'(1)}{\{f(1)+1\}^2}$$
$$=\frac{1+1-1}{(1+1)^2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$g'(0)+g'(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

답 ②

2 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(f(x))=x$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=1$, 즉

$g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$ $(f'(x)\neq0)$이다.

$f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(0)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{f'(x)}-\frac{1}{f'(1)}}{x-1}$$

$h(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$로 놓으면

$$h'(x)=-\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2}$$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{f'(x)}-\frac{1}{f'(1)}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$
$$=-\frac{f''(1)}{\{f'(1)\}^2}$$
$$=-\frac{-2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

다른 풀이

$$\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(0)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times f'(1)$$

$\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{f(x)-f(1)}$에서 $x\to1$일 때

$f(x)\to f(1)$이므로 $t=f(x)$로 놓으면 $t\to0$이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{f(x)-f(1)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{g'(t)-g'(0)}{t}$$
$$=g''(0)$$

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$f(1)=0$에서 $g(0)=1$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$

또한 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$이므로 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g''(x)=-\frac{\{f'(g(x))\}'}{\{f'(g(x))\}^2}$$
$$=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$$
$$=-f''(g(x))\{g'(x)\}^3$$

이므로

$$g''(0)=-f''(g(0))\{g'(0)\}^3$$
$$=-f''(1)\{g'(0)\}^3$$
$$=-(-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{g'(f(x))-g'(0)}{x-1}=g''(0)\times f'(1)$$
$$=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$$

3 곡선 $y=g(x)$가 점 $(n^3+3n^2+1,\ n)$을 지나므로

$g(n^3+3n^2+1)=n$

$f(x)=x^3+3x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x$이므로 $f'(n)=3n^2+6n$

$$g'(n^3+3n^2+1)=\frac{1}{f'(g(n^3+3n^2+1))}=\frac{1}{f'(n)}$$
$$=\frac{1}{3n^2+6n}=\frac{1}{3n(n+2)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}g'(n^3+3n^2+1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$에서 $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$이라 하면

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0-0\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$$

따라서

$$\sum_{n=2}^{\infty}g'(n^3+3n^2+1)=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{36}$$

따라서 $p=36$, $q=5$이므로

$p+q=36+5=41$

답 41

06 도함수의 활용

유제

본문 71~79쪽

1 ④	2 31	3 ①	4 ②	5 ④
6 ①	7 ①	8 ②	9 ④	10 ②

1 $f(x)=\sqrt{7x}$로 놓으면

$$f'(x)=(\sqrt{7x})'=\{(7x)^{\frac{1}{2}}\}'=\frac{1}{2}(7x)^{\frac{1}{2}-1}\times(7x)'=\frac{1}{2}(7x)^{-\frac{1}{2}}\times 7=\frac{7}{2\sqrt{7x}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{x}}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(7,\ 7)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-7=\frac{1}{2}(x-7)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

이 접선이 x축과 만나는 점 A의 좌표는

$0=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$에서 $x=-7$이므로

$\mathrm{A}(-7,\ 0)$

이 접선이 y축과 만나는 점 B의 좌표는

$y=\frac{1}{2}\times 0+\frac{7}{2}$에서 $y=\frac{7}{2}$이므로

$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{7}{2}\right)$

따라서 삼각형 OBA의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times|-7|\times\left|\frac{7}{2}\right|=\frac{7^2}{4}=\frac{49}{4}$$

답 ④

2 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-7}{x-1}=3$에서 $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-7\}=f(1)-7=0$에서

$f(1)=7$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-7}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$$

$\lim_{x\to 7}\frac{g(x)-5}{x-7}=6$에서 $x\to 7$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 7}\{g(x)-5\}=g(7)-5=0$에서

$g(7)=5$

$$\lim_{x\to 7}\frac{g(x)-5}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{g(x)-g(7)}{x-7}=g'(7)=6$$

$$y'=\{(g\circ f)(x)\}'=\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$$

합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$g'(f(1))f'(1)=g'(7)f'(1)=6\times 3=18$$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(7)=5$이고, 합성함수

$y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ (g\circ f)(1))$, 즉

$(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 18이므로 접선의 방정식은

$y-5=18(x-1)$, 즉 $y=18x-13$

따라서 $a=18$, $b=-13$이므로

$a-b=18-(-13)=31$

답 31

3 $f(x)=(x^2+2x-7)e^{-x}$에서

$$f'(x)=(x^2+2x-7)'\times e^{-x}+(x^2+2x-7)\times(e^{-x})'=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x-7)e^{-x}=-(x^2-9)e^{-x}=-(x+3)(x-3)e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로

$(x+3)(x-3)=0$, 즉

$x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $f(-3)=-4e^3$을 가지고 $x=3$에서 극댓값 $f(3)=8e^{-3}$을 가진다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은
$8e^{-3}\times(-4e^3)=-32$

답 ①

4 $f(x)=8x-26\ln x-\frac{15}{x}$에서

$f'(x)=8-\frac{26}{x}+\frac{15}{x^2}$

$=\frac{8x^2-26x+15}{x^2}$

$=\frac{(4x-3)(2x-5)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $(4x-3)(2x-5)=0$

$x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 열린 구간 $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$에서 감소하므로 열린 구간 $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$에 속하는 자연수 x의 값은 1, 2이다.

따라서 함수 $f(x)=8x-26\ln x-\frac{15}{x}$가 감소하는 구간에 속하는 자연수 x의 개수는 2이다.

답 ②

5 $f(x)=e^x-e^{-x}+2$로 놓으면
$f'(x)=e^x+e^{-x}$
$f''(x)=e^x-e^{-x}$
$f''(x)=0$에서 $e^x-e^{-x}=0$이므로 $e^{2x}=1$에서
$x=0$
$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌고, $f(0)=2$이므로
곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(0, 2)$
곡선 $y=f(x)$의 변곡점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(0)=2$이므로 접선의 방정식은
$y-2=2(x-0)$, 즉 $y=2x+2$
따라서 $a=2$, $b=2$이므로
$a+b=2+2=4$

답 ④

6 $f(x)=ax^2+bx+\ln x$에서

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

$f''(x)=2a-\frac{1}{x^2}$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로 $f'(1)=0$에서

$2a+b+1=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(2, f(2))$이므로

$f''(2)=0$에서

$2a-\frac{1}{4}=0$

이므로 $a=\frac{1}{8}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2\times\frac{1}{8}+b+1=0$에서

$b=-\frac{5}{4}$

따라서 $a-b=\frac{1}{8}-\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{11}{8}$

답 ①

7 $f(x)=4\ln x+6\ln(10-x)$에서

$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{6}{10-x}$

$=\frac{4(10-x)-6x}{x(10-x)}$

$=\frac{-10x+40}{x(10-x)}$

$=\frac{10(x-4)}{x(x-10)}$

$f'(x)=0$에서
$x=4$
닫힌 구간 $[2, 8]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

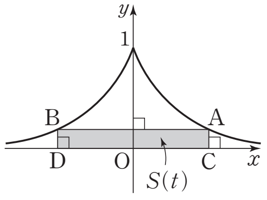
x	2	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이고, 극댓값은
$f(4)=4\ln 4+6\ln 6=14\ln 2+6\ln 3$이다.
$f(2)=4\ln 2+6\ln 8=22\ln 2$이고
$f(8)=4\ln 8+6\ln 2=18\ln 2$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $14 \ln 2+6 \ln 3$이고, 최솟값은 $18 \ln 2$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은
$14 \ln 2+6 \ln 3+18 \ln 2=32 \ln 2+6 \ln 3$

답 ①

8 곡선 $y=e^{-|x|}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t, e^{-t})$ $(t>0)$으로 놓으면
세 점 B, C, D의 좌표는
$\mathrm{B}(-t, e^{-t})$, $\mathrm{C}(t, 0)$, $\mathrm{D}(-t, 0)$



직사각형 ABDC의 넓이를 $S(t)$라 하면
$S(t)=\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{AC}}=2t\times e^{-t}=2te^{-t}$
$S'(t)=2e^{-t}-2te^{-t}=2(1-t)e^{-t}$
$S'(t)=0$에서 $e^{-t}>0$이므로 $1-t=0$, 즉 $t=1$
구간 $(0, \infty)$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

함수 $S(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $S(t)$의 최댓값은 $S(1)=\frac{2}{e}$이다.

따라서 직사각형 ABDC의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

답 ②

9 $f(x)=\frac{x}{e^{2x}}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1\times e^{2x}-x\times 2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{1-2x}{e^{2x}}$

$f'(x)=0$에서 $1-2x=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$이다.

$f(x)=\frac{x}{e^{2x}}\leq\frac{1}{2e}$이므로 $k\geq\frac{1}{2e}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{2e}$이다.

답 ④

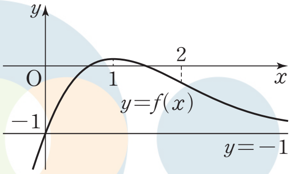
10 $f(x)=3xe^{-x}-1$로 놓으면
$f'(x)=3e^{-x}-3xe^{-x}=-3(x-1)e^{-x}$
$f'(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로 $x-1=0$, 즉 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=3\times e^{-1}-1=\frac{3}{e}-1>0$이다.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3xe^{-x}-1)=-\infty$,

$f(2)=\frac{6}{e^2}-1<0$이고, 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(1, \infty)$에서 감소하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $3xe^{-x}-1=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 ②

참고
함수 $f(x)=3xe^{-x}-1$은 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고,
$f(0)=-1<0$,

$f(1)=\frac{3}{e}-1>0$,

$f(2)=\frac{6}{e^2}-1<0$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $3xe^{-x}-1=0$은 열린 구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그런데 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(0, 1)$에서 증가하고 열린 구간 $(1, 2)$에서 감소하므로 두 열린 구간에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

Level 1 기초 연습

본문 80쪽

1 ②　2 ②　3 ①　4 ②　5 ④

1 $f(x)=2e^{x-3}+1$로 놓으면

$f'(x)=2e^{x-3}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=2e^{3-3}=2e^0=2$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x-3)$, 즉 $y=2x-3$

따라서 $a=2$, $b=-3$이므로

$a+b=2+(-3)=-1$

답 ②

2 $f(x)=(x^2-2x+1)e^{-x}$에서

$f'(x)=(2x-2)e^{-x}-(x^2-2x+1)e^{-x}$

$=-(x^2-4x+3)e^{-x}$

$=-(x-1)(x-3)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로

$(x-1)(x-3)=0$, 즉

$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 열린 구간 $(1, 3)$에서 증가하므로 $b-a$의 최댓값은 $3-1=2$이다.

답 ②

3 $f(x)=\frac{4}{x^2+3}$로 놓으면

$$f'(x)=-\frac{4\times 2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{8(x^2+3)^2-8x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}=-\frac{8(x^2+3)-32x^2}{(x^2+3)^3}=-\frac{24-24x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{24(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$과 $x=1$의 좌우에서 각각 $f''(x)$의 부호가 바뀌고, $f(-1)=1$, $f(1)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(-1, 1)$, $(1, 1)$이다.

곡선 $y=f(x)$의 변곡점 중 x좌표가 양수인 점의 좌표는 $(1, 1)$이다.

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a+b=1+1=2$

답 ①

4 $f(x)=2xe^{-\frac{1}{2}x}$에서

$$f'(x)=2\times e^{-\frac{1}{2}x}+2x\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=(2-x)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$f'(x)=0$에서 $e^{-\frac{1}{2}x}>0$이므로 $2-x=0$, 즉 $x=2$

닫힌 구간 $[-2, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-4e$	↗	극대	↘	$8e^{-2}$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=4e^{-1}$이다.

$f(-2)=-4e$이고 $f(4)=8e^{-2}$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $4e^{-1}$이고 최솟값은 $-4e$이다.

따라서 $M=4e^{-1}$, $m=-4e$이므로

$Mm=4e^{-1}\times(-4e)=-16$

답 ②

5 $f(x)=(\ln x)^2-4\ln x$로 놓고,
모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하면 된다.

$$f'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}-\frac{4}{x}$$
$$=\frac{2\ln x-4}{x}$$
$$=\frac{2(\ln x-2)}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=2$이므로 $x=e^2$
구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은
$f(e^2)=(\ln e^2)^2-4\ln e^2=4-8=-4$
이다.
모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$가 성립하도록 하려면 함수 $f(x)$의 최솟값 $f(e^2)$은 k 이상이어야 한다.
따라서 $k\leq -4$이므로 실수 k의 최댓값은 -4이다.

답 ④

Level 2 기본 연습 본문 81쪽

1 22 2 ④ 3 ② 4 ④

1 $f(x)=x^3+7$에서 $f'(x)=3x^2$
$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로
$g(8)=k$로 놓으면 $f(k)=8$
$f(x)=x^3+7$이므로 $f(k)=8$에서
$k^3+7=8$
$k^3=1$
$(k-1)(k^2+k+1)=0$
k는 실수이므로
$k=1$, 즉 $g(8)=1$

따라서 $f'(1)=3$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(8, g(8))$, 즉 $(8, 1)$에서의 접선의 기울기는

$$g'(8)=\frac{1}{f'(g(8))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(8, g(8))$, 즉 $(8, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 방정식은
$y-1=-3(x-8)$, 즉 $y=-3x+25$
따라서 $a=-3$, $b=25$이므로
$a+b=-3+25=22$

답 22

다른 풀이
함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(p, q)$에서의 접선 l의 기울기는 $f'(p)$이고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(q, p)$에서의 접선 m의 기울기는 $g'(q)$이다.
$f(p)=q$에서 $g(q)=p$이므로

$$g'(q)=\frac{1}{f'(g(q))}=\frac{1}{f'(p)}$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기는 서로 역수인 관계에 있다.
$g(8)=k$로 놓으면
$f(k)=8$
$k^3+7=8$
$k^3=1$
$(k-1)(k^2+k+1)=0$
k는 실수이므로 $k=1$
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(8, g(8))$, 즉 $(8, 1)$에서의 접선의 기울기는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 8)$에서의 접선의 기울기의 역수이다.
$f(x)=x^3+7$에서 $f'(x)=3x^2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 8)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이다.
따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(8, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(8, g(8))$, 즉 $(8, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -3이다.
그러므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(8, g(8))$, 즉 $(8, 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$y-1=-3(x-8)$, 즉 $y=-3x+25$
따라서 $a=-3$, $b=25$이므로
$a+b=-3+25=22$

2 $y=3\sqrt{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{3}{2\sqrt{x}}}$ $(x>0)$

곡선 $y=3\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}(t^2, 3t)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{3}{2\sqrt{t^2}}=\frac{3}{2t}$이므로 접선의 방정식은

$y-3t=\frac{3}{2t}(x-t^2)$, 즉 $y=\boxed{\frac{3}{2t}}x+\frac{3t}{2}$ …… ㉠

점 A에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발 B의 좌표는

$\mathrm{B}(-1, 3t)$이므로 직선 OB의 방정식은

$y=-3tx$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$-3tx=\frac{3}{2t}x+\frac{3t}{2}$에서

$(2t^2+1)x=-t^2$이므로

$x=-\frac{t^2}{2t^2+1}$

이것을 ㉡에 대입하면

$y=\frac{3t^3}{2t^2+1}$

그러므로 점 P의 좌표는

$\left(-\boxed{\frac{t^2}{2t^2+1}}, 3t\times\boxed{\frac{t^2}{2t^2+1}}\right)$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $g(t)=\frac{3}{2t}$, $h(t)=\frac{t^2}{2t^2+1}$이므로

$f(4)\times g(4)\times h(1)=\frac{3}{2\sqrt{4}}\times\frac{3}{2\times4}\times\frac{1}{2+1}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{32}$

답 ④

3 $f(x)=x(\ln x)^2$에서

$f'(x)=(\ln x)^2+2x\times\ln x\times\frac{1}{x}$

$=(\ln x)^2+2\ln x$

$=(2+\ln x)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$이므로

$x=e^{-2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이다.

그러므로 $a=1$

$f'(x)=(2+\ln x)\ln x$에서

$f''(x)=\frac{1}{x}\times\ln x+(2+\ln x)\times\frac{1}{x}$

$=\frac{2(1+\ln x)}{x}$

$f''(x)=0$에서 $\ln x=-1$이므로

$x=e^{-1}$

$x=e^{-1}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 (e^{-1}, e^{-1})

따라서 $a=1$, $b=e^{-1}$, $c=e^{-1}$이므로

$a+\frac{c}{b}=1+\frac{e^{-1}}{e^{-1}}=1+1=2$

답 ②

4 $(x-4)^2=4e^{x-6}$에서

$(x-4)^2e^{-x+6}=4$

$f(x)=(x-4)^2e^{-x+6}$으로 놓으면

$f'(x)=2(x-4)e^{-x+6}-(x-4)^2e^{-x+6}$

$=-(x-4)(x-6)e^{-x+6}$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x+6}>0$이므로

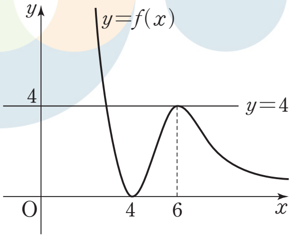
$(x-4)(x-6)=0$, 즉 $x=4$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 $f(4)=0$을 갖고, $x=6$에서 극댓값 $f(6)=2^2=4$를 갖는다.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-4)^2e^{-x+6}=\infty$이고, 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(6, \infty)$에서 감소하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른

두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=4$, 즉 $(x-4)^2=4e^{x-6}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 82쪽

1 ② 2 ② 3 1

1 $f(x)=e^{nx-1}+1$로 놓으면

$f'(x)=ne^{nx-1}$

직선 $y=nx-1$과 평행하고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 접점을 $(t,\ e^{nt-1}+1)$로 놓으면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ e^{nt-1}+1)$에서의 접선의 기울기는

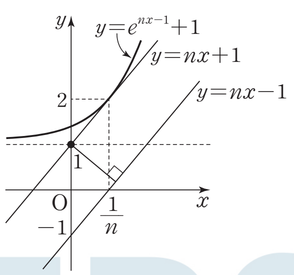
$f'(t)=ne^{nt-1}=n$이므로

$nt-1=0$, 즉 $t=\dfrac{1}{n}$

곡선 $y=e^{nx-1}+1$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{n},\ 2\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=n\left(x-\dfrac{1}{n}\right)$, 즉 $y=nx+1$

선분 PQ의 길이의 최솟값 a_n은 평행한 두 직선 $y=nx+1$, $y=nx-1$ 사이의 거리와 같다.



또한 평행한 두 직선 $y=nx+1$, $y=nx-1$ 사이의 거리는 직선 $y=nx+1$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $nx-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$a_n=\frac{|-1-1|}{\sqrt{n^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{4}{{a_n}^2}=\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)=\frac{10\times11\times21}{6}+10\times1$$
$$=385+10=395$$

답 ②

참고

방정식 $e^{nx-1}+1=nx-1$에서

$nx-1=t$로 놓으면

$e^t+1=t$, 즉 $e^t-t+1=0$

$g(t)=e^t-t+1$로 놓으면

$g'(t)=e^t-1$

$g'(t)=0$에서 $t=0$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	극소	↗

함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극소이면서 최소이다.

함수 $g(t)$의 최솟값은 $g(0)=2$이므로 $g(t)=0$을 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다.

따라서 자연수 n에 대하여 방정식 $e^{nx-1}+1=nx-1$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 자연수 n에 대하여 곡선 $y=e^{nx-1}+1$과 직선 $y=nx-1$은 만나지 않는다.

함수 $g(t)=e^t-t+1$의 최솟값은 2이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=e^t-t+1\geq2>0$이다.

그러므로 모든 실수 t에 대하여 $e^t-t+1>0$, 즉 $e^t+1>t$이다.

$t=nx-1$이므로 모든 실수 x에 대하여

$e^{nx-1}-nx+2>0$, 즉 $e^{nx-1}+1>nx-1$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 곡선 $y=e^{nx-1}+1$은 직선 $y=nx-1$보다 위쪽에 있다.

다른 풀이

선분 PQ의 길이의 최솟값은 곡선 $y=e^{nx-1}+1$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=nx-1$ 사이의 거리의 최솟값과 같다.

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ e^{nt-1}+1)$로 놓으면

선분 PQ의 길이는 점 P와 직선 $y=nx-1$,

즉 $nx-y-1=0$ 사이의 거리와 같고, 모든 실수 t에 대하여 $e^{nt-1}-nt+2>0$이므로

$$\frac{|nt-(e^{nt-1}+1)-1|}{\sqrt{n^2+(-1)^2}}=\frac{|nt-e^{nt-1}-2|}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\frac{|e^{nt-1}-nt+2|}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\frac{e^{nt-1}-nt+2}{\sqrt{n^2+1}}$$

$h(t)=e^{nt-1}-nt+2$로 놓으면

$h'(t)=ne^{nt-1}-n=n(e^{nt-1}-1)$

$h'(t)=0$에서 $e^{nt-1}-1=0$, 즉 $e^{nt-1}=1$이므로

$nt-1=0$, 즉 $t=\frac{1}{n}$

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	↘	극소	↗

함수 $h(t)$는 $t=\frac{1}{n}$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $h(t)$의 최솟값은 $h\left(\frac{1}{n}\right)=e^0-1+2=2$이다.

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값 a_n은

$a_n=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{4}{{a_n}^2}=\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}n^2+\sum_{n=1}^{10}1$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}+10\times1$$
$$=385+10=395$$

2 $f(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=-e^{-x}$

제1사분면에 있는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t,\ e^{-t})\ (t>0)$으로 놓으면 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$, 즉 $y=-e^{-t}x+e^{-t}(t+1)$

접선 $y=-e^{-t}x+e^{-t}(t+1)$이 x축과 만나는 점 B의 좌표는 $0=-e^{-t}x+e^{-t}(t+1)$에서

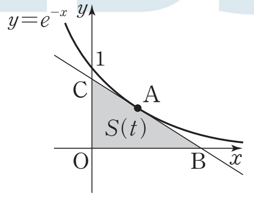
$x=t+1$이므로

$\mathrm{B}(t+1,\ 0)$

접선 $y=-e^{-t}x+e^{-t}(t+1)$이 y축과 만나는 점 C의 좌표는 $y=-e^{-t}\times0+e^{-t}(t+1)$에서

$y=e^{-t}(t+1)$이므로

$\mathrm{C}(0,\ e^{-t}(t+1))$



삼각형 OBC의 넓이를 $S(t)$로 놓으면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(t+1)\times e^{-t}(t+1)$$
$$=\frac{1}{2}e^{-t}(t+1)^2$$

이므로

$$S'(t)=\frac{1}{2}\{-e^{-t}(t+1)^2+e^{-t}\times2(t+1)\}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-t}(t+1)(t+1-2)$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-t}(t+1)(t-1)$$

$S'(t)=0$에서 $t>0$이고, $e^{-t}>0$이므로 $t=1$

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	극대	↘

함수 $S(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로

함수 $S(t)$의 최댓값은 $S(1)=\frac{1}{2}e^{-1}(1+1)^2=\frac{2}{e}$이다.

따라서 삼각형 OBC의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e}$이다.

답 ②

3 $2\ln x=kx^2$에서

$\frac{2\ln x}{x^2}=k$

$f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x^2-2\ln x\times2x}{x^4}$$
$$=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=\frac{1}{2}$이므로 $x=\sqrt{e}$

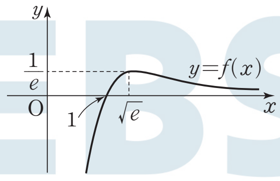
구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$

의 최댓값은 $f(\sqrt{e})=\frac{1}{e}$이다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{2\ln x}{x^2}=-\infty$이고,
함수 $f(x)$는 열린 구간 $(\sqrt{e}, \infty)$에서 감소하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



집합 $\{x|2\ln x=kx^2\}$이 공집합이 되도록 하려면 방정식 $2\ln x=kx^2$은 실근을 갖지 않아야 한다.
그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않아야 한다.
따라서 $k>\frac{1}{e}$ …… ㉠

$e^{x^2}=kx^2$에서 $\frac{e^{x^2}}{x^2}=k$

$g(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2}$으로 놓으면

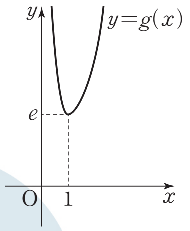
$$g'(x)=\frac{2xe^{x^2}\times x^2-e^{x^2}\times 2x}{x^4}$$
$$=\frac{2e^{x^2}(x^2-1)}{x^3}$$
$$=\frac{2e^{x^2}(x+1)(x-1)}{x^3}$$

$g'(x)=0$에서 $2e^{x^2}>0$이므로
$(x+1)(x-1)=0$
$x=-1$ 또는 $x=1$
$x>0$이므로 $x=1$
구간 $(0, \infty)$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $g(x)$의 최솟값은 $g(1)=e$이다.

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^2}}{x^2}=\infty$이고, 함수 $g(x)$는 열린 구간 $(1, \infty)$에서 증가하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



집합 $\{x|e^{x^2}=kx^2\}$이 공집합이 되도록 하려면 방정식 $e^{x^2}=kx^2$은 실근을 갖지 않아야 한다.
그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않아야 한다.
따라서 $k<e$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{1}{e}<k<e$

따라서 $p=\frac{1}{e}$, $q=e$이므로

$pq=\frac{1}{e}\times e=1$

답 1

Reading POWER

수준별 · 주제별 하루 10분 읽기의 힘
[유형−기본, 완성, 구문 · 주제−1, 2 · 속독]

07 여러 가지 적분법

유제 본문 85~93쪽

1 ④	2 ②	3 ④	4 ⑤	5 ③
6 9	7 5	8 ③	9 ②	10 ②

1 $f'(x)=2e^x+\sin x$이므로

$f(x)=\int(2e^x+\sin x)dx$

$=2e^x-\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=4$이므로

$f(0)=2-1+C=4$에서

$C=3$

따라서 $f(x)=2e^x-\cos x+3$이므로

$f(\pi)=2e^\pi+1+3=2e^\pi+4$

답 ④

2 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$

$=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=1-\frac{\pi}{4}$

답 ②

3 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)$

$=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=4xe^{x^2}$이므로

$f'(x)=2xe^{x^2}$

$f(x)=\int 2xe^{x^2}dx$

$x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$f(x)=\int 2xe^{x^2}dx=\int e^t dt$

$=e^t+C=e^{x^2}+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1+C=2$에서 $C=1$이므로

$f(x)=e^{x^2}+1$

따라서 $f(\sqrt{2})=e^2+1$

답 ④

4 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\int_e^{e^2}\frac{1+\ln x}{x(\ln x)(2+\ln x)}dx$

$=\int_e^{e^2}\left\{\frac{1+\ln x}{(\ln x)(2+\ln x)}\times\frac{1}{x}\right\}dx$

$=\int_1^2\frac{1+t}{t(2+t)}dt$

$=\int_1^2\frac{t+1}{t^2+2t}dt$

$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{2t+2}{t^2+2t}dt$

$=\frac{1}{2}\left[\ln|t^2+2t|\right]_1^2$

$=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 3)$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

답 ⑤

5 $f(x)=2x+1$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_{-1}^0(2x+1)e^{-x}dx$

$=\left[-(2x+1)e^{-x}\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0 2(-e^{-x})dx$

$=(-1-e)+2\int_{-1}^0 e^{-x}dx$

$=-1-e-2\left[e^{-x}\right]_{-1}^0$

$=-1-e-2(1-e)$

$=e-3$

답 ③

6 $\int x\sin x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int x\sin x\,dx$$
$$=-x\cos x-\int\{1\times(-\cos x)\}dx$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$$\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}f(x)dx$$
$$=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=(\pi+0)-(0+0)$$
$$=\pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|dx=-\int_{\pi}^{2\pi}f(x)dx$$
$$=-\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=-\{(-2\pi+0)-(\pi+0)\}$$
$$=3\pi$$

$$\int_{2\pi}^{3\pi}|f(x)|dx=\int_{2\pi}^{3\pi}f(x)dx$$
$$=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_{2\pi}^{3\pi}$$
$$=(3\pi+0)-(-2\pi+0)$$
$$=5\pi$$

따라서

$$\int_0^{3\pi}|f(x)|dx$$
$$=\int_0^{\pi}|f(x)|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|f(x)|dx$$
$$=\pi+3\pi+5\pi$$
$$=9\pi$$

이므로

$k=9$

답 9

7 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\Big[F(t)\Big]_2^x}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)$$
$$=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}\times4(4+1)$$
$$=5$$

답 5

8 $\sin\{\pi(x+1)\}=\sin(\pi x+\pi)=-\sin\pi x$이므로

$f'(x)=e^{x+1}\sin\{\pi(x+1)\}-e^x\sin\pi x$

$=-e^{x+1}\sin\pi x-e^x\sin\pi x$

$=-e^x(e+1)\sin\pi x$

$f'(x)=0$에서 $e^x(e+1)>0$이므로 $\sin\pi x=0$

$0<x<2$이므로 $x=1$

따라서 $0<x<1$에서 $f'(x)<0$, $1<x<2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가진다.

따라서 $a=1$

답 ③

9 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{3^2}+\sqrt[n]{3^3}+\cdots+\sqrt[n]{3^n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{3^k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3^{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}\right)$$
$$=\int_0^1 3^x dx$$
$$=\left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{\ln 3}(3-1)$$
$$=\frac{2}{\ln 3}$$

답 ②

10 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\times e^{\frac{2k}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\times e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}\right)$$

$=\frac{1}{4}\int_0^2 xe^x dx$

$\int_0^2 xe^x dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$\int_0^2 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx$

$=(2e^2-0)-\left[e^x\right]_0^2$

$=2e^2-(e^2-1)$

$=e^2+1$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\times e^{\frac{2k}{n}}\right)=\frac{e^2+1}{4}$

답 ②

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\times e^{\frac{2k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\times e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{1}{n}\right)$

$=\int_0^1 xe^{2x}dx$

$=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)$

$=\frac{e^2+1}{4}$

Level 1 기초 연습

본문 94~95쪽

1 ③	2 ③	3 ①	4 ①	5 ②
6 ⑤	7 ②	8 ④	9 ②	

1 $\int_1^2 \frac{2x^3+x-1}{x^2}dx=\int_1^2\left(2x+\frac{1}{x}-x^{-2}\right)dx$

$=\left[x^2+\ln|x|+x^{-1}\right]_1^2$

$=\left(4+\ln 2+\frac{1}{2}\right)-(1+0+1)$

$=\frac{5}{2}+\ln 2$

답 ③

2 $\int_1^2 e^{y-1}dy=\int_1^2 e^{x-1}dx$이므로

$\int_0^1 e^{x-1}dx+\int_1^2 e^{y-1}dy$

$=\int_0^1 e^{x-1}dx+\int_1^2 e^{x-1}dx$

$=\int_0^2 e^{x-1}dx$

$=\frac{1}{e}\int_0^2 e^x dx$

$=\frac{1}{e}\left[e^x\right]_0^2$

$=\frac{1}{e}(e^2-1)$

$=e-\frac{1}{e}$

답 ③

3 $4x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$\int_0^1 f(4x)dx=\int_0^4 \frac{1}{4}f(t)dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^4 f(x)dx$

$=\frac{1}{4}\times 4=1$

답 ①

4 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$이므로

$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이다.

$f(x)=\int\frac{1}{x^2+x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=0-\ln 2+C=0$에서

$C=\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+\ln 2$이므로

$$f(3)=\ln 3-\ln 4+\ln 2$$
$$=\ln 3-2\ln 2+\ln 2$$
$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

답 ①

5 $\int x\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int x\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

한편, $f'(x)=x\ln x=0$에서 $x>0$이므로 $\ln x=0$

즉, $x=1$

$0<x<1$에서 $f'(x)<0$, $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{1}{4}+C=0$에서

$C=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}$이므로

$$f(e)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{e^2+1}{4}$$

답 ②

6 $f(1)=\int_1^1\frac{t}{(t+1)^2}dt=0$

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x\frac{t}{(t+1)^2}dt=\frac{x}{(x+1)^2}$이므로

$f'(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선에 수직이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)=-4(x-1)$$

따라서 $g(x)=-4(x-1)$이므로

$g(3)=-4(3-1)=-8$

답 ⑤

참고

$\int_1^x\frac{t}{(t+1)^2}dt\ (x>-1)$에서

$t+1=s$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=1$이고

$t=1$일 때 $s=2$, $t=x$일 때 $s=x+1$이므로

$$f(x)=\int_1^x\frac{t}{(t+1)^2}dt$$
$$=\int_2^{x+1}\frac{s-1}{s^2}ds$$
$$=\int_2^{x+1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)ds$$
$$=\left[\ln|s|+\frac{1}{s}\right]_2^{x+1}$$
$$=\left(\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right)-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-\ln 2-\frac{1}{2}$$

7 $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$로 놓고 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+2h}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_3^{3+2h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(3+2h)-F(3)}{h}$$
$$=2\lim_{h\to 0}\frac{F(3+2h)-F(3)}{2h}$$
$$=2F'(3)$$
$$=2f(3)$$
$$=2\times 1$$
$$=2$$

답 ②

참고

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1}+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

8 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{n}}}\times\frac{1}{n}\right)$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2x}}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(2-0)$

$=\sqrt{2}$

답 ④

9 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{2n+1}+\frac{n}{2n+2}+\frac{n}{2n+3}+\cdots+\frac{n}{2n+n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2+\frac{2}{n}}+\frac{1}{2+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}\right)$

$=\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$

$=\left[\ln|x+2|\right]_0^1$

$=\ln 3-\ln 2$

$=\ln\frac{3}{2}$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 96쪽

1 ⑤ 2 8 3 ④ 4 ④

1 $f'(x)=\begin{cases}2\cos x & (x>0)\\ \sin x+a & (x<0)\end{cases}$에서

$\int 2\cos x\,dx=2\sin x+C_1$,

$\int(\sin x+a)dx=-\cos x+ax+C_2$

(C_1, C_2는 적분상수)이므로

$f(x)=\begin{cases}2\sin x+C_1 & (x>0)\\ -\cos x+ax+C_2 & (x<0)\end{cases}$

$f(\pi)=\pi$이므로

$2\sin\pi+C_1=\pi$에서

$C_1=\pi$

$f(-\pi)=2$이므로

$-\cos(-\pi)-a\pi+C_2=2$에서

$C_2=a\pi+1$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}(2\sin x+C_1)=\lim_{x\to 0-}(-\cos x+ax+C_2)$

$C_1=-1+C_2$

그런데 $C_1=\pi$이므로

$C_2=\pi+1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\pi+1=\pi+1$이므로

$a=1$

따라서 $x<0$일 때, $f(x)=-\cos x+x+\pi+1$이므로

$f(-2\pi)=-\cos(-2\pi)-2\pi+\pi+1$

$=-\pi$

답 ⑤

2 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$, $x^2=t-1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2\sqrt{x^2+1}\times 2x\right)dx$

$=\int_1^2\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{t}\,dt$

$=\int_1^2\frac{1}{2}\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

$=\left[\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$=\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{2}{15}\sqrt{2}+\frac{2}{15}$

따라서 $a=\frac{2}{15}$, $b=\frac{2}{15}$이므로

$30(a+b)=30\times\left(\frac{2}{15}+\frac{2}{15}\right)=8$

답 8

3 $\int x^2e^{2x}dx$에서 $u(x)=x^2$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=2x$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$f(x)=\int x^2e^{2x}dx$

$=x^2\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int\left(2x\times\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}dx$

$\int xe^{2x}dx$에서 $p(x)=x$, $q'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$p'(x)=1$, $q(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$\int xe^{2x}dx=x\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int\left(1\times\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1\right)$

$=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)+C$ (단, C는 적분상수)

그런데 $f(0)=\frac{1}{4}(0-0+1)+C=\frac{1}{4}$에서

$C=0$

$f(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=e^{2x}$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)=e^{2x}$의 실근이다.

$e^{2x}(2x^2-2x+1)=4e^{2x}$

$e^{2x}(2x^2-2x-3)=0$ ······ ㉠

그런데 $e^{2x}>0$이므로 방정식 ㉠의 실근은 이차방정식 $2x^2-2x-3=0$의 실근과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=e^{2x}$이 만나는 모든 점의 x좌표의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $-\frac{3}{2}$이다.

답 ④

4 $xf(x)=x\ln x+\int_e^x f(t)dt$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=\ln x+1+f(x)$

$f'(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int\frac{\ln x}{x}dx+\int\frac{1}{x}dx$

$\int\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$\int\frac{\ln x}{x}dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C_1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+C$ (단, C는 적분상수) ······ ㉡

㉠의 양변에 $x=e$를 대입하면

$ef(e)=e$, $f(e)=1$

㉡에서 $f(e)=\frac{1}{2}+1+C$이므로

$\frac{3}{2}+C=1$에서 $C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x-\frac{1}{2}$이므로

$f(e^3)=\frac{1}{2}\times3^2+3-\frac{1}{2}=7$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 97쪽

1 ④ 2 ④ 3 110

1 조건 (가)에서

$f(0)=0$, $f'(0)=3$

조건 (나)에서

$f'(0)=\sqrt{a}=3$이므로 $a=9$

$f(x)=\int(x+1)\sqrt{x^2+2x+9}\,dx$

$x^2+2x+9=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=2x+2=2(x+1)$이므로

$\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+9}\,dx$

$=\int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt$

$=\int \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$ (단, C는 적분상수)

$=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C$

에서

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x+9)\sqrt{x^2+2x+9}+C$

그런데 $f(0)=0$이므로

$\frac{1}{3}\times 9\times\sqrt{9}+C=0$에서

$C=-9$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x+9)\sqrt{x^2+2x+9}-9$이므로

$a+f(\sqrt{a})=9+f(3)$

$=9+\frac{1}{3}\times 24\times\sqrt{24}-9$

$=16\sqrt{6}$

답 ④

2 $f(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=\cos x$

$f'\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\cos\frac{k\pi}{n}$이므로 곡선 $y=\sin x$ 위의

점 $\mathrm{P}_k\left(\frac{k\pi}{n}, \sin\frac{k\pi}{n}\right)(k=1, 2, 3, \cdots, n)$에서의 접선의

방정식은

$y-\sin\frac{k\pi}{n}=\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)$

$y=\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\left(x-\frac{k\pi}{n}\right)+\sin\frac{k\pi}{n}$

$=\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)x-\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sin\frac{k\pi}{n}$

이 직선이 y축과 만나는 점 Q_k는

$\mathrm{Q}_k\left(0, -\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sin\frac{k\pi}{n}\right)$이므로

$S_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}+\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{k\pi}{n}\ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$

또한 점 $\mathrm{R}_k(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$은 $\mathrm{R}_k\left(\frac{k\pi}{n}, 0\right)$이므로

$T_k=\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{n}\times\sin\frac{k\pi}{n}\ (k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$

이때 $T_n=0$이므로

$T_k=\frac{1}{2}\times\frac{k\pi}{n}\times\sin\frac{k\pi}{n}\ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(S_k-T_k)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(-\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)\frac{k\pi}{n}$

이때 $\frac{k}{n}=x_k$, $\frac{1}{n}=\Delta x$로 놓으면

함수는 $y=-\frac{\pi^2}{2}x^2\cos\pi x$이므로 정적분의 정의에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(-\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)\frac{k\pi}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cos\frac{k\pi}{n}\times\frac{1}{n}\right\}$

$=-\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 x^2\cos\pi x\,dx$

$\int_0^1 x^2\cos\pi x\,dx$에서 $u(x)=x^2$, $v'(x)=\cos\pi x$로 놓으면

$u'(x)=2x$, $v(x)=\frac{1}{\pi}\sin\pi x$이므로

$-\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 x^2\cos\pi x\,dx$

$=-\frac{\pi^2}{2}\left\{\left[\frac{1}{\pi}x^2\sin\pi x\right]_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin\pi x\,dx\right\}$

$=\pi\int_0^1 x\sin\pi x\,dx$

$\int_0^1 x\sin\pi x\,dx$에서 $p(x)=x$, $q'(x)=\sin\pi x$로 놓으면

$p'(x)=1$, $q(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$이므로

$\pi\int_0^1 x\sin\pi x\,dx$

$=\pi\left\{\left[-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi x\,dx\right\}$

$=\pi\left\{\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\left[\sin\pi x\right]_0^1\right\}$

$=\pi\left(\frac{1}{\pi}+0\right)$

$=1$

답 ④

3 $f(x)=(x+1)^2$에서

$f'(x)=2(x+1)$

원점 O에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을

$(t,\ (t+1)^2)$으로 놓으면 접선의 방정식은

$y-(t+1)^2=2(t+1)(x-t)$

접선이 원점을 지나므로 위의 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$-(t+1)^2=-2t(t+1)$

$t^2-1=0$

$(t+1)(t-1)=0$

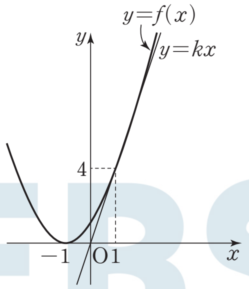
$t=-1$ 또는 $t=1$

$f'(-1)=0,\ f'(1)=4$

(i) $a=0$일 때

[그림 1]과 같이 $0\le k\le 4$이므로

$g(a)=4$

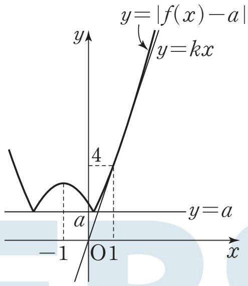


[그림 1]

(ii) $0<a\le 4$일 때

[그림 2]와 같이 k의 최댓값은 4이므로

$g(a)=4$

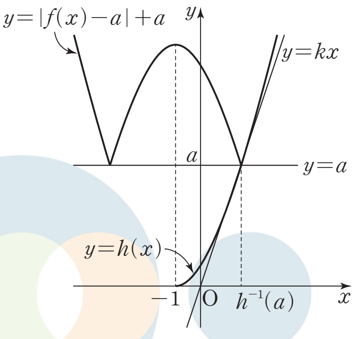


[그림 2]

(iii) $a>4$일 때

$h(x)=f(x)\,(x\ge -1)$로 놓으면 [그림 3]과 같이 k의 최댓값은 직선 $y=kx$가 점 $(h^{-1}(a),\ a)$를 지날 때이므로

$$g(a)=\frac{a}{h^{-1}(a)}$$



[그림 3]

따라서 $\displaystyle\int_0^9 g(a)\,da=\int_0^4 4\,da+\int_4^9 \frac{a}{h^{-1}(a)}\,da$

그런데 $a=h(x)$에서 $\dfrac{da}{dx}=h'(x)$이고

$h(1)=4,\ h(2)=9$이므로

$$\int_0^9 g(a)\,da$$

$$=\int_0^4 4\,da+\int_4^9 \frac{a}{h^{-1}(a)}\,da$$

$$=16+\int_1^2 \frac{h(x)}{x}h'(x)\,dx$$

$$=16+\int_1^2\left\{\frac{(x+1)^2}{x}\times 2(x+1)\right\}dx$$

$$=16+2\int_1^2 \frac{(x+1)^3}{x}\,dx$$

$$=16+2\int_1^2\left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=16+2\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x|\right]_1^2$$

$$=16+2\left\{\left(\frac{8}{3}+6+6+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+3+0\right)\right\}$$

$$=\frac{107}{3}+2\ln 2$$

따라서 $p=3,\ q=107$이므로

$p+q=3+107=110$

답 110

참고

$a\ge 4$일 때

$a=(x+1)^2\,(x\ge -1)$에서 $x=\sqrt{a}-1$이므로

$$g(a)=\frac{a}{\sqrt{a}-1}$$

$\sqrt{a}-1=s$로 놓으면

$a=(s+1)^2$

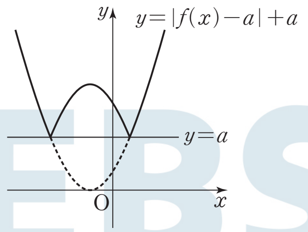
$$\frac{da}{ds}=2(s+1)$$

$a=4$일 때 $s=1$, $a=9$일 때 $s=2$이므로

$$\int_4^9 \frac{a}{\sqrt{a}-1}da$$
$$=2\int_1^2 \frac{(s+1)^3}{s}ds$$
$$=2\int_1^2\left(s^2+3s+3+\frac{1}{s}\right)ds$$
$$=2\left[\frac{1}{3}s^3+\frac{3}{2}s^2+3s+\ln|s|\right]_1^2$$
$$=2\left\{\left(\frac{8}{3}+6+6+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+3+0\right)\right\}$$
$$=\frac{59}{3}+2\ln 2$$

참고

함수 $y=|f(x)-a|+a$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$에서 직선 $y=a$의 윗부분은 그대로 두고, 아랫부분은 직선 $y=a$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.



(2015 개정교육과정) 수학의 왕도

새 교과서, 새 수능 대비 수학 기본서
시각적인 개념 설명으로 쉽게 이해
세분화된 개념 확인 문제로 개념 다지기

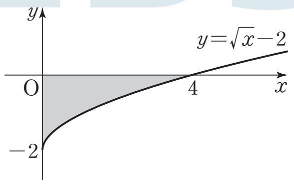
08 정적분의 활용

유제

본문 101~107쪽

1 ③ 2 ② 3 ① 4 ① 5 ③
6 ③ 7 ③

1 곡선 $y=\sqrt{x}-2$는 그림과 같다.

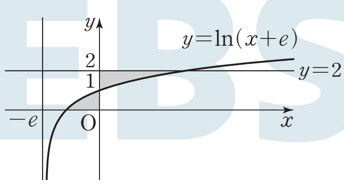


닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 $y=\sqrt{x}-2\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4\{-(\sqrt{x}-2)\}dx$$
$$=\int_0^4(2-\sqrt{x})dx$$
$$=\left[2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=8-\frac{16}{3}$$
$$=\frac{8}{3}$$

답 ③

2 $y=\ln(x+e)$에서
$x+e=e^y$
$x=e^y-e$

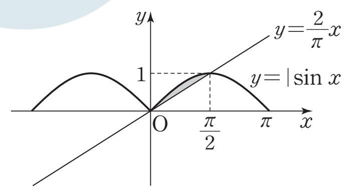


함수 $x=e^y-e$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 $x\le 0$,
함수 $x=e^y-e$가 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 $x\ge 0$
이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2|e^y-e|dy$$
$$=\int_0^1\{-(e^y-e)\}dy+\int_1^2(e^y-e)dy$$
$$=\int_0^1(e-e^y)dy+\int_1^2(e^y-e)dy$$
$$=\Big[ey-e^y\Big]_0^1+\Big[e^y-ey\Big]_1^2$$
$$=\{(e-e)-(0-1)\}+\{(e^2-2e)-(e-e)\}$$
$$=1+e^2-2e$$
$$=(e-1)^2$$

답 ②

3



두 점 $(0,\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}x=\frac{2}{\pi}x$$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $|\sin x|\ge\frac{2}{\pi}x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(|\sin x|-\frac{2}{\pi}x\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx$$
$$=\left[-\cos x-\frac{1}{\pi}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left(0-\frac{\pi}{4}\right)-(-1-0)$$
$$=1-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{4-\pi}{4}$$

답 ①

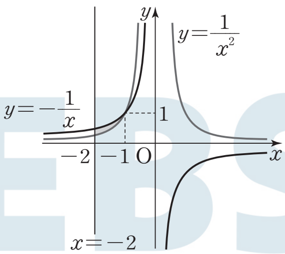
4 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}$$

두 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^2}$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$, $-x=1$에서

$x=-1$



닫힌 구간 $[-2, -1]$에서 $-\frac{1}{x} \ge \frac{1}{x^2}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{-1}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\left[\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1}$$
$$=-\left\{(0+1)-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\ln 2-\frac{1}{2}$$

답 ①

5 빗금친 부분과 색칠된 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}(a\cos x-\sin x)dx$$
$$=\left[a\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$$

따라서 $a=1+\sqrt{2}$

답 ③

6 빗금친 부분과 색칠된 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-1}^{k}(1-\sqrt{x+1})dx=\left[x-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{k}$$
$$=\left\{k-\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}\right\}-(-1-0)$$
$$=k+1-\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}=0$$

$\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}=k+1$에서 $k+1>0$이므로

$\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{1}{2}}=1$

$(k+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

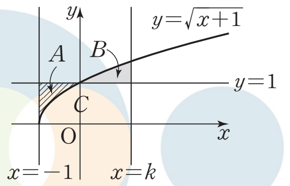
$k+1=\frac{9}{4}$

따라서 $k=\frac{5}{4}$

답 ③

다른 풀이1

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=-1$, $y=1$로 둘러싸인 빗금친 부분을 A, 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=k$, $y=1$로 둘러싸인 색칠된 부분을 B, 곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 x축 및 두 직선 $x=k$, $y=1$로 둘러싸인 부분을 C라 하고, 세 부분 A, B, C의 넓이를 각각 a, b, c라 하자.



$a=b$이므로

$c+a=c+b$

$c+a=\{k-(-1)\}\times 1=k+1$

$$c+b=\int_{-1}^{k}\sqrt{x+1}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{k}$$
$$=\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}$$

즉, $k+1=\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}$

$\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{1}{2}}=1$

$(k+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

$k+1=\frac{9}{4}$

따라서 $k=\frac{5}{4}$

다른 풀이2

곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=-1$, $y=1$로 둘러싸인 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=1-\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,dx$

$=1-\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$

$=1-\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{3}$

곡선 $y=\sqrt{x+1}$과 두 직선 $x=k$, $y=1$로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_{0}^{k}(\sqrt{x+1}-1)dx$

$=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-x\right]_{0}^{k}$

$=\left\{\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}-k\right\}-\left(\frac{2}{3}-0\right)$

$S_1=S_2$이므로

$\frac{1}{3}=\left\{\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}-k\right\}-\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{3}{2}}=k+1$

$\frac{2}{3}(k+1)^{\frac{1}{2}}=1$

$(k+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

$k+1=\frac{9}{4}$

따라서 $k=\frac{5}{4}$

7 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 1이다.

이 입체도형을 x좌표가 $x\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sec x$이고 중심각의 크기가 1인 부채꼴이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\sec^2 x\times 1=\frac{1}{2}\sec^2 x$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sec^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}\left[\tan x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

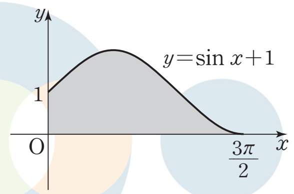
$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 108쪽

1 ③ 2 ③ 3 ① 4 ③

1



구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)dx$

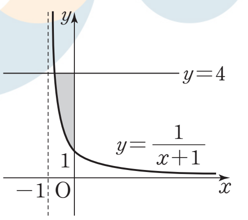
$=\left[-\cos x+x\right]_{0}^{\frac{3\pi}{2}}$

$=\left(0+\frac{3\pi}{2}\right)-(-1+0)$

$=\frac{3\pi}{2}+1$

답 ③

2



$y=\frac{1}{x+1}$에서

$xy+y=1$

$x=\frac{1-y}{y}=\frac{1}{y}-1$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{1}^{4}\left|\frac{1}{y}-1\right|dy$

$=\int_{1}^{4}\left(1-\frac{1}{y}\right)dy$

$=\left[y-\ln|y|\right]_{1}^{4}$

$=(4-\ln 4)-(1-0)$

$=3-2\ln 2$

답 ③

다른 풀이

곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $\frac{1}{\alpha+1}=4$에서

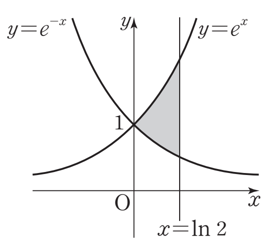
$\alpha=-\frac{3}{4}$

따라서 구하는 부분의 넓이는 네 점 $(0, 0)$, $(0, 4)$, $\left(-\frac{3}{4}, 4\right)$, $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=\frac{1}{x+1}$과 직선 $x=-\frac{3}{4}$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 된다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{3}{4}\times 4-\int_{-\frac{3}{4}}^{0}\frac{1}{x+1}dx$$
$$=3-\Big[\ln|x+1|\Big]_{-\frac{3}{4}}^{0}$$
$$=3-\left(0-\ln\frac{1}{4}\right)$$
$$=3-2\ln 2$$

3



$e^x=e^{-x}$에서 $e^{2x}=1$이므로 $x=0$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{\ln 2}(e^x-e^{-x})dx$$
$$=\Big[e^x+e^{-x}\Big]_{0}^{\ln 2}$$
$$=\left(2+\frac{1}{2}\right)-(1+1)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

4 $S_1+S_3=S_2$이므로

$$\int_{0}^{2\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-k\right)dx=\left[-2\cos\frac{x}{2}-kx\right]_{0}^{2\pi}$$
$$=(2-2k\pi)-(-2-0)$$
$$=4-2k\pi=0$$

따라서 $k=\frac{2}{\pi}$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 109쪽

1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 ②

1 $f(x)=(x+1)e^x$이라 하면

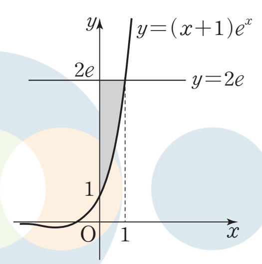
$$f'(x)=e^x+(x+1)e^x$$
$$=(x+2)e^x$$

$f'(x)=0$에서 $e^x>0$이므로 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이고 $x<-2$에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $f(0)=1$, $f(1)=2e$이므로 구하는 넓이는 그림의 색칠된 부분의 넓이이다.

이 부분의 넓이는 네 점 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2e)$, $(0, 2e)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=(x+1)e^x$과 직선 $x=1$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 된다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=1\times 2e-\int_0^1 (x+1)e^x dx$$
$$=2e-\left\{\left[(x+1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right\}$$
$$=2e-\left\{(2e-1)-\left[e^x\right]_0^1\right\}$$
$$=2e-\{(2e-1)-(e-1)\}$$
$$=e$$

답 ③

2 $a>e$이므로 $x\geq 1$일 때

$\ln x\geq \log_a x$

$$S=\int_1^e (\ln x-\log_a x)dx$$
$$=\int_1^e \left(\ln x-\frac{\ln x}{\ln a}\right)dx$$
$$=\int_1^e \left(1-\frac{1}{\ln a}\right)\ln x\, dx$$
$$=\left(1-\frac{1}{\ln a}\right)\int_1^e \ln x\, dx$$
$$=\left(1-\frac{1}{\ln a}\right)\left\{\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e \left(x\times\frac{1}{x}\right)dx\right\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{\ln a}\right)\left(e-\left[x\right]_1^e\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{\ln a}\right)\{e-(e-1)\}$$
$$=1-\frac{1}{\ln a}$$

$1-\dfrac{1}{\ln a}=\dfrac{1}{4}$에서

$\ln a=\dfrac{4}{3}$

따라서 $a=e^{\frac{4}{3}}$

답 ③

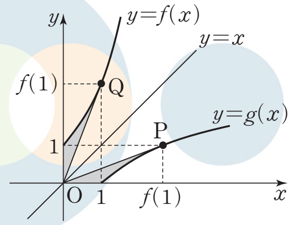
3 점 $P(f(1),\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(1,\ f(1))$이라 하자.

$f'(x)=e^x+1$에서 $f'(1)=e+1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $Q(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-(e+1)=(e+1)(x-1)$

즉, $y=(e+1)x$

따라서 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축 및 직선 $y=(e+1)x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1 \{(e^x+x)-(e+1)x\}dx$$
$$=\int_0^1 (e^x-ex)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(e-\frac{e}{2}\right)-(1-0)$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

답 ⑤

4 x좌표가 $x\left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$인 반원이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\pi\times\left\{\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\right\}^2$$
$$=\frac{\pi}{8}(1+2\sin x\cos x)$$

따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8}(1+2\sin x\cos x)dx$$
$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx+\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$$
$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이고 $x=0$일 때 $t=0$,

$x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$V=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\int_0^1 t\,dt$$
$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{8}$$
$$=\frac{\pi(\pi+2)}{16}$$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 110쪽

1 ①　　2 ④　　3 ①

1 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$이라 하면 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$에서

$$f'(x)=\frac{2x\times x^3-(x^2-1)\times 3x^2}{x^6}$$
$$=\frac{3-x^2}{x^4}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l이 제1사분면에서 접하는 점의 x좌표를 α라 하면 직선 l의 방정식은

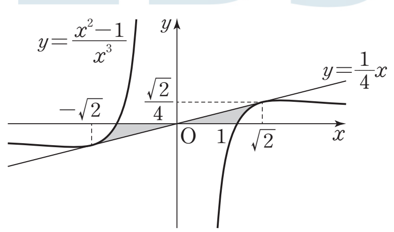
$$y-\frac{\alpha^2-1}{\alpha^3}=\frac{3-\alpha^2}{\alpha^4}(x-\alpha)$$

즉, $y=\frac{3-\alpha^2}{\alpha^4}x-\frac{4-2\alpha^2}{\alpha^3}$　　$\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$\frac{4-2\alpha^2}{\alpha^3}=0$$
$$\alpha^2=2$$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\sqrt{2}$



따라서 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x^2-1}{x^3}dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}-2\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}-2\left[\ln|x|+\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}-2\left\{\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=1-\ln 2$$

답 ①

2 $\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2=(\ln e)^2=1$이므로 두 점 A, B의 y좌표는 모두 1이다.

따라서 곡선 $y=(\ln x)^2$과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\{1-(\ln x)^2\}dx$$
$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x)^2dx$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x)^2dx$$
$$=\left[x(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}x\left(2\times\ln x\times\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-2\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx$$
$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-2\left\{\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx\right\}$$
$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-2\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}+2\left[x\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-2\left(e+\frac{1}{e}\right)+2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$
$$=e-\frac{5}{e}$$

이므로

$$S=\left(e-\frac{1}{e}\right)-\left(e-\frac{5}{e}\right)=\frac{4}{e}$$

점 P의 y좌표를 a라 하면 삼각형 APB의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\left(e-\frac{1}{e}\right)\times(1-a)=\frac{2}{e}$$

$1-a=\frac{4}{e}\times\frac{e}{e^2-1}$

따라서 $a=1-\frac{4}{e^2-1}=\frac{e^2-5}{e^2-1}$

답 ④

3 입체도형 S를 x좌표가 $x(1\le x\le 2)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $(\sqrt{x}-2)^2$인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(\sqrt{x}-2)^2\}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{x}-2)^4$$

따라서 $V_S=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{x}-2)^4\,dx$ …… ㉠

입체도형 T를 x좌표가 $x(1\le x\le 2)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $3-(\sqrt{x}-2)^2$인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $T(x)$라 하면

$$T(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\{3-(\sqrt{x}-2)^2\}^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{9-6(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{x}-2)^4\}$$

따라서 $V_T=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\{9-6(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{x}-2)^4\}\,dx$

…… ㉡

㉠, ㉡에서

$$V_T-V_S=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\{9-6(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{x}-2)^4\}\,dx$$
$$-\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{x}-2)^4\,dx$$
$$=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\{9-6(\sqrt{x}-2)^2\}\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2(-6x+24\sqrt{x}-15)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-3x^2+16x^{\frac{3}{2}}-15x\right]_1^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(-12+32\sqrt{2}-30)-(-3+16-15)\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-40+32\sqrt{2})$$
$$=8\sqrt{6}-10\sqrt{3}$$

답 ①

memo