정답과 해설

I 통계

1 대푯값과 산포도

STEP 1 개념 + 대표문제 확인하기 P. 8~9

1 11　**2** 6　**3** 평균 : 21회, 중앙값 : 23.5회, 최빈값 : 3회
4 ③　**5** 7　**6** 중앙값 : 250 kWh, 최빈값 : 150 kWh
7 ㄱ, ㄴ **8** 166 cm　**9** 5　**10** $\sqrt{5.6}$ ℃　**11** ㄴ, ㄷ

1 a, b, c, d의 평균이 12이므로

$\frac{a+b+c+d}{4}=12$　　$\therefore a+b+c+d=48$

따라서 7, a, b, c, d, 11의 평균은

$\frac{7+a+b+c+d+11}{6}=\frac{7+48+11}{6}=\frac{66}{6}=11$

2 평균이 5이므로

$\frac{8+a+1+0+(-6)+b+(-3)+6+11}{9}=5$

$a+b+17=45$　　$\therefore a+b=28$　　$\cdots$ ㉠

$3a=4b$에서 $a=\frac{4}{3}b$를 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{3}b+b=28$, $7b=84$　　$\therefore b=12$, $a=16$

따라서 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

-6, -3, 0, 1, 6, 8, 11, 12, 16

이므로 중앙값은 6이다.

3 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 다음과 같다.

(단위 : 회)

3, 3, 11, 12, 19, 23, 24, 27, 30, 31, 33, 36

(평균)$=\frac{3+3+11+12+19+23+24+27+30+31+33+36}{12}$

$=\frac{252}{12}=21$(회)

자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 6번째와 7번째 자료의 값의 평균이 중앙값이므로

(중앙값)$=\frac{23+24}{2}=23.5$(회)

윗몸일으키기 횟수가 3회인 도수가 2명으로 가장 크므로

(최빈값)$=3$(회)

4 ③ 자료의 값 중 800은 다른 자료의 값과 비교하여 매우 큰 값, 즉 극단적인 값이다.
따라서 이 자료는 평균보다 중앙값이 대푯값으로 더 적절하다.

5 x를 제외한 6개의 자료의 값 중에서 10 brix의 도수는 3개이고, 그 이외의 자료의 값의 도수는 모두 1개이므로 최빈값은 x의 값에 관계없이 10 brix이다.

이때 평균과 최빈값이 같으므로

$\frac{10+11+13+x+10+9+10}{7}=10$에서

$63+x=70$　　$\therefore x=7$

6 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 12번째와 13번째 자료의 값의 평균이 중앙값이므로

(중앙값)$=\frac{250+250}{2}=250$ (kWh)

전력 소비량이 100 kWh 이상 200 kWh 미만인 계급의 도수가 8개월로 가장 크므로

(최빈값)$=150$ (kWh)

7 ㄱ. 평균보다 큰 변량의 편차는 양수, 작은 변량의 편차는 음수이다.
ㄴ. (편차)=(변량)−(평균)에서 편차가 0이면 (변량)=(평균)이다.
ㄷ. 편차의 절댓값이 클수록 변량은 평균에서 멀리 분포되어 있다.
ㄹ. 표준편차는 분산의 음이 아닌 제곱근이다.
ㅁ. 산포도가 작을수록 자료는 고르게 분포되어 있다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8 편차의 합은 0이므로

$(-5)+6+x+9+(-8)=0$　　$\therefore x=-2$

$\therefore$ (덕재의 키)$=168+(-2)=166$ (cm)

9 평균이 9권이므로

$\frac{5+12+x+8+9+11}{6}=9$, $45+x=54$　　$\therefore x=9$

이때 각 변량의 편차를 차례로 구하면

-4권, 3권, 0권, -1권, 0권, 2권이므로

(분산)$=\frac{(-4)^2+3^2+0^2+(-1)^2+0^2+2^2}{6}=\frac{30}{6}=5$

10 (평균)$=\frac{10\times2+12\times5+14\times7+16\times3+18\times3}{20}$

$=\frac{280}{20}=14$ (℃)

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-4℃, -2℃, 0℃, 2℃, 4℃

(분산)$=\frac{(-4)^2\times2+(-2)^2\times5+0^2\times7+2^2\times3+4^2\times3}{20}$

$=\frac{112}{20}=5.6$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{5.6}$ (℃)

11 ㄱ. A, B 두 부서의 직원의 수와 평균이 같으므로 연봉의 총합도 같다.
ㄴ. 연봉이 3500만 원 미만인 직원의 수는 알 수 없다.
ㄷ. (분산)$=\frac{\{(\text{편차})^2\text{의 합}\}}{(\text{자료의 개수})}$에서 A, B 두 부서의 직원의 수가 같으므로 (편차)^{2}의 합은 표준편차가 더 큰 A 부서가 B 부서보다 더 크다.
ㄹ. B 부서의 표준편차가 A 부서보다 작으므로 B 부서의 연봉이 A 부서의 연봉보다 더 고르다.
따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 10~14

1 15.6초 **2** 96 **3** 48점 **4** 69 kg, 73 kg **5** 20개
6 ④ **7** $a=17$, $b=20$ 또는 $a=19$, $b=17$ **8** 5
9 ⑤ **10** 30 **11** ② **12** 중앙값 : 50분, 최빈값 : 70분
13 56 또는 66 **14** 평균 : 34, 분산 : 11 **15** ⑤ **16** 58
17 $m+1$, s^2 **18** 88.8 **19** ③ **20** ② **21** $\sqrt{2}$ **22** ③
23 평균 : 7시간, 표준편차 : $\sqrt{9.4}$시간 **24** C 학생
25 ㄷ, ㄹ **26** 80점 **27** 핫도그, 호떡
28 (1) $a=20$, $b=19$ (2) A 선수

1 4회째의 기록을 x초라 하면 4회까지의 기록의 평균이 16.5초 이하가 되어야 하므로

$\dfrac{16.8\times3+x}{4}\le16.5$, $50.4+x\le66$ $\quad\therefore x\le15.6$

따라서 태희는 4회째의 100 m 달리기에서 15.6초 이내로 달려야 한다.

2 끈 4개의 길이의 평균이 12 cm이므로

$\dfrac{a+12+16+b}{4}=12$ $\quad\therefore a+b=20$

또 4개의 정사각형의 넓이의 평균이 9.5 cm^2이므로

$\left(\dfrac{a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{12}{4}\right)^2+\left(\dfrac{16}{4}\right)^2+\left(\dfrac{b}{4}\right)^2=4\times9.5$

$\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{16}+25=38$ $\quad\therefore a^2+b^2=208$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로

$20^2=208+2ab$, $2ab=192$ $\quad\therefore ab=96$

3 3학년의 과학 점수의 평균을 x점이라 하면 1학년의 평균은 $(x+10)$점, 2학년의 평균은 $(x+10)+20=x+30$(점)이고 2학년의 평균은 3학년의 평균의 2배이므로

$x+30=2x$ $\quad\therefore x=30$

따라서 1, 2, 3학년의 과학 점수의 평균이 각각 40점, 60점, 30점이므로 전체 학생의 과학 점수의 평균은

$\dfrac{40\times30+60\times50+30\times20}{30+50+20}=\dfrac{4800}{100}=48$(점)

4 전학을 간 두 학생의 몸무게를 각각 x kg, $(x+4)$ kg이라 하면 학생 40명의 몸무게의 합은 $40\times52=2080$ (kg)이므로

$\dfrac{2080-(x+x+4)}{38}=51$, $2x=138$

$\therefore x=69$

따라서 전학을 간 두 학생의 몸무게는 차례로 69 kg, 73 kg이다.

5 잘못 본 학생의 턱걸이 개수를 x개, 이 학생의 턱걸이 개수를 제외한 나머지 학생 7명의 턱걸이 개수의 합을 A개라 하면

(잘못 구한 평균)=(실제 평균)+0.75이므로

$\dfrac{A+x}{8}=\dfrac{A+14}{8}+0.75$, $A+x=A+14+6$

$\therefore x=20$

따라서 턱걸이 개수를 20개로 잘못 보았다.

6 맥박 수의 중앙값이 78회이므로 $x\ge80$ $\quad\cdots$ ㉠

평균이 77회 이하이므로 $\dfrac{65+70+80+76+x+83}{6}\le77$

$374+x\le462$ $\quad\therefore x\le88$ $\quad\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $80\le x\le88$이므로 x의 값이 될 수 있는 자연수의 개수는 $88-80+1=9$(개)이다.

7 자료 A의 중앙값이 17이므로 $a=17$ 또는 $b=17$이다.

(i) $a=17$, $b=17$일 때, 두 자료 A, B를 섞은 전체 자료의 중앙값은 $\dfrac{17+17}{2}=17$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $a=17$, $b\ne17$일 때, 두 자료 A, B를 섞은 전체 자료의 중앙값이 18이 되려면 $b-1$은 17과 21 사이에 있어야 하므로

$\dfrac{17+(b-1)}{2}=18$ $\quad\therefore b=20$

(iii) $a\ne17$, $b=17$일 때, 두 자료 A, B를 섞은 전체 자료의 중앙값이 18이 되려면 a는 17과 21 사이에 있어야 하므로

$\dfrac{17+a}{2}=18$ $\quad\therefore a=19$

따라서 (i)~(iii)에서 $a=17$, $b=20$ 또는 $a=19$, $b=17$

8 평균이 5이므로 $\dfrac{0+a+1+7+b+12+5+2}{8}=5$

$27+a+b=40$ $\quad\therefore a+b=13$

또 최빈값이 5이므로 $a=5$ 또는 $b=5$

$\therefore a=5$, $b=8$ ($\because a<b$)

따라서 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 4번째와 5번째 자료의 값의 평균이 중앙값이므로

(중앙값)$=\dfrac{5+5}{2}=5$

9 최빈값이 8이 되려면 5의 도수가 2이고, 8의 도수가 1이므로 a, b, c 중 적어도 두 수는 8이어야 한다.

이때 a, b, c의 값을 8, 8, x라 하면 중앙값이 7이므로 x는 5와 8 사이에 있어야 한다.

(중앙값)$=\dfrac{x+8}{2}=7$에서 $x+8=14$ $\quad\therefore x=6$

$\therefore a+b+c=8+8+6=22$

10 7개의 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, (나)에서 중앙값이 40이므로 4번째에 변량 40이 오고, (다)에서 최빈값이 35이므로 변량 35는 적어도 2개이다.

즉, 2번째와 3번째에 각각 변량 35가 온다.

(라)에서 가장 큰 변량이 50이므로 7번째에 변량 50이 온다.

이때 5번째와 6번째 변량을 각각 a, b라 하고, 7개의 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

x, 35, 35, 40, a, b, 50

(가)에서 7개의 변량의 평균이 41이므로 x의 값이 최소가 되려면 a, b의 값이 최대가 되어야 하고, 최빈값이 35이므로 나머지 수들은 서로 다른 수이어야 한다.

따라서 $a=48$, $b=49$일 때 x의 값이 최소가 되므로

(평균)$=\dfrac{x+35+35+40+48+49+50}{7}=41$에서

$x+257=287$ $\quad\therefore x=30$

11 남학생의 봉사 활동 시간의 평균, 중앙값, 최빈값을 각각 구하면

$(평균)=\frac{2\times1+3\times1+4\times3+5\times4+6\times4+7\times2}{1+1+3+4+4+2}$

$=\frac{75}{15}=5$(시간)

남학생의 봉사 활동 시간을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 8번째 자료의 값이 중앙값이므로

(중앙값)$=5$(시간)

남학생의 자료에서 봉사 활동 시간이 5시간, 6시간인 도수가 4명으로 가장 크므로

(최빈값)$=5$(시간), 6(시간)

여학생의 봉사 활동 시간의 평균, 중앙값, 최빈값을 각각 구하면

$(평균)=\frac{2\times2+3\times3+4\times5+5\times3+6\times2}{2+3+5+3+2}$

$=\frac{60}{15}=4$(시간)

여학생의 봉사 활동 시간을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 8번째 자료의 값이 중앙값이므로

(중앙값)$=4$(시간)

여학생의 자료에서 봉사 활동 시간이 4시간인 도수가 5명으로 가장 크므로

(최빈값)$=4$(시간)

ㄱ. 봉사 활동 시간의 평균은 남학생이 5시간, 여학생이 4시간으로 서로 다르다.

ㄴ. 봉사 활동 시간의 중앙값은 남학생이 5시간, 여학생이 4시간으로 남학생이 여학생보다 더 크다.

ㄷ. 봉사 활동 시간의 최빈값은 남학생이 5시간, 6시간으로 2개이고, 여학생이 4시간으로 1개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

12 $3+8+x+y+5=40$이므로

$x+y=24$ ⋯ ㉠

$(평균)=\frac{10\times3+30\times8+50\times x+70\times y+90\times5}{40}=55$(분)

이므로 $5x+7y=148$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=10$, $y=14$

자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 20번째와 21번째 자료의 값이 속하는 계급의 계급값의 평균이 중앙값이므로

$(중앙값)=\frac{50+50}{2}=50$(분)

독서 시간이 60분 이상 80분 미만인 계급의 도수가 14명으로 가장 크므로

(최빈값)$=70$(분)

13 편차의 합은 0이므로

$(2x^2-2)+(2x+3)+(-2)+(-x^2-7)+(-x+2)=0$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

(편차)=(변량)−(평균)에서 평균이 50이므로

(i) $x=-3$일 때, $A-50=2\times(-3)^2-2$ $\therefore A=66$

(ii) $x=2$일 때, $A-50=2\times2^2-2$ $\therefore A=56$

따라서 (i), (ii)에서 변량 A의 값은 56 또는 66이다.

14 변량 31의 편차를 x라 하면 편차의 합은 0이므로

$(-3)+1+5+x=0$ $\therefore x=-3$

(평균)=(변량)−(편차)이므로 (평균)$=31-(-3)=34$

이때 4개의 변량의 편차는 각각 -3, 1, 5, -3이므로

$(분산)=\frac{(-3)^2+1^2+5^2+(-3)^2}{4}=\frac{44}{4}=11$

15 연속하는 5개의 홀수를

$a-4$, $a-2$, a, $a+2$, $a+4$(a는 $a\geq5$인 홀수)라 하면

$(평균)=\frac{(a-4)+(a-2)+a+(a+2)+(a+4)}{5}$

$=\frac{5a}{5}=a$

$\therefore (분산)=\frac{(-4)^2+(-2)^2+0^2+2^2+4^2}{5}=\frac{40}{5}=8$

16 달걀 D의 무게를 xg이라 하면 5개의 무게는 차례로

$(x+13)$g, $(x-6)$g, $(x-3)$g, xg, $(x-9)$g이다.

$\therefore (평균)=\frac{(x+13)+(x-6)+(x-3)+x+(x-9)}{5}$

$=\frac{5x-5}{5}=x-1$(g)

이때 각 변량의 편차를 차례로 구하면

14g, -5g, -2g, 1g, -8g이므로

$(분산)=\frac{14^2+(-5)^2+(-2)^2+1^2+(-8)^2}{5}=\frac{290}{5}=58$

17 자료 A는 1, 3, 5, ⋯, 99이므로

$(평균)=\frac{1+3+5+\cdots+99}{50}=m$ ⋯ ㉠

$(분산)=\frac{(1-m)^2+(3-m)^2+\cdots+(99-m)^2}{50}=s^2$ ⋯ ㉡

자료 B는 2, 4, 6, ⋯, 100이고 자료 A의 각 값에 1을 더한 것과 같으므로

$(평균)=\frac{(1+1)+(3+1)+(5+1)+\cdots+(99+1)}{50}$

$=\frac{(1+3+5+\cdots+99)+50}{50}$

$=\frac{1+3+5+\cdots+99}{50}+1=m+1$ ($\because$ ㉠)

$(분산)=\frac{\{2-(m+1)\}^2+\{4-(m+1)\}^2+\cdots+\{100-(m+1)\}^2}{50}$

$=\frac{(1-m)^2+(3-m)^2+\cdots+(99-m)^2}{50}=s^2$ ($\because$ ㉡)

다른 풀이 (자료 B의 각 변량)=(자료 A의 각 변량)+1이므로

(자료 B의 평균)=(자료 A의 평균)$+1=m+1$

(자료 B의 분산)=(자료 A의 분산)$=s^2$

18 통학 시간이 32분 이상 40분 미만인 계급의 도수를 x명이라 하면 24분 이상 32분 미만인 계급의 도수는 $3x$명이므로

$6+8+2+3x+x=20$, $4x=4$ $\therefore x=1$

즉, 통학 시간이 32분 이상 40분 미만인 계급의 도수는 1명, 24분 이상 32분 미만인 계급의 도수는 3명이므로

$$(\text{평균})=\frac{4\times6+12\times8+20\times2+28\times3+36\times1}{20}$$

$$=\frac{280}{20}=14(\text{분})$$

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-10분, -2분, 6분, 14분, 22분이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-10)^2\times6+(-2)^2\times8+6^2\times2+14^2\times3+22^2\times1}{20}$$

$$=\frac{1776}{20}=88.8$$

19 (어떤 계급의 도수)=(전체 도수)×(그 계급의 상대도수)이므로 주어진 상대도수의 분포표를 도수분포표로 나타내면 다음과 같다.

인터넷 사용 시간(분)	상대도수	도수(명)
$20^{이상}\sim30^{미만}$	0.12	$50\times0.12=6$
$30\sim40$	0.24	$50\times0.24=12$
$40\sim50$	0.38	$50\times0.38=19$
$50\sim60$	0.24	$50\times0.24=12$
$60\sim70$	0.02	$50\times0.02=1$
합계	1	50

$$\therefore (\text{평균})=\frac{25\times6+35\times12+45\times19+55\times12+65\times1}{50}$$

$$=\frac{2150}{50}=43(\text{분})$$

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-18분, -8분, 2분, 12분, 22분이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-18)^2\times6+(-8)^2\times12+2^2\times19+12^2\times12+22^2\times1}{50}$$

$$=\frac{5000}{50}=100$$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{100}=10$(분)

20 첫째 날의 팔굽혀펴기 횟수를 x회라 하면 5일 동안의 팔굽혀펴기 횟수는 차례로

x회, $(x+a)$회, $(x+2a)$회, $(x+3a)$회, $(x+4a)$회

최고 기록과 최저 기록의 차가 12회이므로

$(x+4a)-x=12$, $4a=12$ $\quad\therefore a=3$

따라서 5일 동안의 팔굽혀펴기 횟수는 차례로

x회, $(x+3)$회, $(x+6)$회, $(x+9)$회, $(x+12)$회이므로

$$(\text{평균})=\frac{x+(x+3)+(x+6)+(x+9)+(x+12)}{5}$$

$$=\frac{5x+30}{5}=x+6(\text{회})$$

각 변량의 편차를 차례로 구하면

-6회, -3회, 0회, 3회, 6회이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-6)^2+(-3)^2+0^2+3^2+6^2}{5}=\frac{90}{5}=18$$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$(회)

21 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2015}=4030$이고

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+\cdots+x_{2015}^{\,2}=12090$이므로

$$(\text{평균})=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2015}}{2015}=\frac{4030}{2015}=2$$

$$(\text{분산})=\frac{(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+(x_3-2)^2+\cdots+(x_{2015}-2)^2}{2015}$$

$$=\frac{(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_{2015}^{\,2})-4(x_1+x_2+\cdots+x_{2015})+4\times2015}{2015}$$

$$=\frac{12090-4\times4030+8060}{2015}=\frac{4030}{2015}=2$$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{2}$

22 소정이의 5개 과목의 시험 성적을 각각 a점, b점, c점, d점, e점이라 하면

$$(\text{평균})=\frac{a+b+c+d+e}{5}=70(\text{점})$$

$$(\text{분산})=\frac{(a-70)^2+(b-70)^2+(c-70)^2+(d-70)^2+(e-70)^2}{5}$$

$$=4^2=16$$

희영이의 5개 과목의 시험 성적은 각각 $(a+10)$점, $(b+10)$점, $(c+10)$점, $(d+10)$점, $(e+10)$점이므로

$$(\text{평균})=\frac{(a+10)+(b+10)+(c+10)+(d+10)+(e+10)}{5}$$

$$=\frac{(a+b+c+d+e)+50}{5}=\frac{a+b+c+d+e}{5}+10$$

$$=70+10=80(\text{점})$$

$$(\text{분산})=\frac{(a+10-80)^2+(b+10-80)^2+(c+10-80)^2+(d+10-80)^2+(e+10-80)^2}{5}$$

$$=\frac{(a-70)^2+(b-70)^2+(c-70)^2+(d-70)^2+(e-70)^2}{5}$$

$$=16$$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{16}=4$(점)

따라서 희영이의 시험 성적의 평균과 표준편차의 합은

$80+4=84$(점)

참고 **변화된 변량의 평균, 표준편차 구하기**

($a+10$, $b+10$, $c+10$, $d+10$, $e+10$의 평균)

$=$(a, b, c, d, e의 평균)$+10$

($a+10$, $b+10$, $c+10$, $d+10$, $e+10$의 표준편차)

$=$(a, b, c, d, e의 표준편차)

23 남학생 90명의 수면 시간의 합은 $90\times7=630$(시간)

여학생 110명의 수면 시간의 합은 $110\times7=770$(시간)

$$\therefore (\text{3학년 전체 학생의 평균})=\frac{630+770}{90+110}=\frac{1400}{200}=7(\text{시간})$$

또 남학생 90명의 표준편차가 4시간이므로 남학생의 수면 시간의 (편차)^{2}의 합은 $4^2\times90=1440$

여학생 110명의 표준편차가 2시간이므로 여학생의 수면 시간의 (편차)^{2}의 합은 $2^2\times110=440$

$$\therefore (\text{3학년 전체 학생의 분산})=\frac{1440+440}{90+110}=\frac{1880}{200}=9.4$$

$\therefore$ (3학년 전체 학생의 표준편차)$=\sqrt{9.4}$(점)

참고 $(\text{분산})=\dfrac{\{(\text{편차})^2\text{의 합}\}}{(\text{자료의 개수})}$이므로

{(편차)^{2}의 합}=(분산)×(자료의 개수)

이때 (편차)^2={(각 변량)−(평균)}^{2}이고, 두 집단의 평균이 서로 같으므로 두 집단 전체의 (편차)^{2}의 합은 각 집단에서의 (편차)^{2}의 합을 더한 것과 같다.

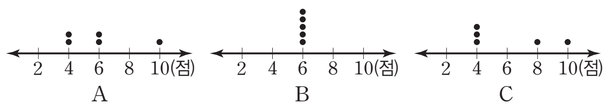
24 A, B, C 세 학생의 평균을 각각 구하면

(A의 평균)$=\dfrac{4+6+10+6+4}{5}=\dfrac{30}{5}=6$(점),

(B의 평균)$=\dfrac{6+6+6+6+6}{5}=\dfrac{30}{5}=6$(점),

(C의 평균)$=\dfrac{4+4+4+8+10}{5}=\dfrac{30}{5}=6$(점)

즉, A, B, C 세 학생의 평균은 모두 6점으로 같고, 점수의 분포를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 표준편차가 가장 큰 학생은 평균 6점을 중심으로 점수의 흩어진 정도가 가장 큰 C 학생이다.

25 ㄱ. A 상자보다 D 상자에 들어 있는 감자의 무게의 표준편차가 더 작으므로 D 상자에 들어 있는 감자의 무게가 A 상자보다 더 고르다.

ㄴ. B 상자에 들어 있는 감자의 무게의 평균이 가장 크므로 감자의 무게가 가장 많이 나가는 상자는 B이다.

ㄷ. E 상자에 들어 있는 감자의 무게의 표준편차가 가장 작으므로 감자의 무게가 가장 고른 상자는 E이다.

ㄹ. 각 상자에 들어 있는 감자의 개수는 같으므로 감자의 무게의 (편차)^{2}의 합이 가장 큰 상자는 표준편차가 가장 큰 A이다.

따라서 옳지 않은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

26 5명의 학생의 수학 점수를 하나씩 입력할 때마다 그때까지 입력한 수학 점수의 평균은 자연수이므로

(ⅰ) 처음 두 학생의 수학 점수를 입력할 때,
두 점수의 합은 2의 배수이어야 하므로 두 점수는 모두 홀수이거나 짝수이다.

(ⅱ) 세 번째 학생의 수학 점수를 입력할 때,
세 점수의 합은 3의 배수이어야 하므로 세 학생의 점수를 각각 3으로 나누었을 때 그 나머지의 합이 3의 배수인 것을 찾으면 82점, 73점, 91점이다.
따라서 (ⅰ)에서 처음 두 학생의 점수는 73점과 91점이고 세 번째 점수는 82점이다.

(ⅲ) 네 번째 학생의 수학 점수를 입력할 때,
네 점수의 합은 4의 배수이어야 하므로 (ⅱ)에서 세 학생의 점수의 합 $82+73+91=246$(점)에 더하였을 때 4의 배수가 되는 것을 찾으면 74점이다.

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에서 마지막에 입력한 수학 점수는 80점이다.

27 오전, 오후 간식으로 먹을 간식의 열량을 각각 a kcal, b kcal라 하면 청소년 1일 권장 열량이 2700 kcal이므로 지후가 내일 하루 동안 먹을 음식의 열량의 합은

$660+a+650+b+790=2700$ $\quad\therefore a+b=600$

주어진 그래프에서 열량의 합이 600 kcal가 되는 두 간식은 도넛과 붕어빵, 핫도그와 호떡이므로 두 간식의 열량은 각각 215 kcal와 385 kcal, 270 kcal와 330 kcal이다.

이때 지후가 하루 동안 섭취하는 열량의 평균은

$\dfrac{2700}{5}=540$ (kcal)

이므로 도넛과 붕어빵, 핫도그와 호떡의 열량의 편차는 각각 -325 kcal와 -155 kcal 또는 -270 kcal와 -210 kcal이다.

따라서 각 경우의 (편차)^{2}의 합은

$(-325)^2+(-155)^2=129650$, $(-270)^2+(-210)^2=117000$

이고 열량을 최대한 고르게 하려면 (편차)^{2}의 합이 작아야 하므로 지후가 선택해야 하는 간식은 핫도그와 호떡이다.

28 (1) A 선수의 득점의 평균은

(평균)$=\dfrac{20+21+23+19+a+17}{6}=\dfrac{100+a}{6}$(점)

이때 평균과 최빈값이 같고 a를 제외한 나머지 변량의 도수가 모두 1이므로 a의 값은 최빈값과 같다.

즉, $\dfrac{100+a}{6}=a$에서 $5a=100$ $\quad\therefore a=20$

따라서 A 선수의 득점의 평균과 최빈값은 20점이다.

B 선수의 득점의 평균은

(평균)$=\dfrac{18+19+21+15+22+b}{6}=\dfrac{95+b}{6}$(점)

이때 평균과 중앙값이 같으므로

(ⅰ) $b\geq21$이면 중앙값은 $\dfrac{19+b}{2}$(점)이므로

$\dfrac{95+b}{6}=\dfrac{19+b}{2}$, $4b=76$ $\quad\therefore b=19$

그런데 $b\geq21$이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $19\leq b<21$이면 중앙값은 $\dfrac{b+19}{2}$(점)이므로

$\dfrac{95+b}{6}=\dfrac{b+19}{2}$, $2b=38$ $\quad\therefore b=19$

(ⅲ) $b<19$이면 중앙값은 $\dfrac{19+21}{2}=20$(점)이므로

$\dfrac{95+b}{6}=20$ $\quad\therefore b=25$

그런데 $b<19$이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에서 $b=19$이므로 B 선수의 평균과 중앙값은 19점이다.

(2) A 선수의 득점의 평균이 20점이므로

(분산)$=\dfrac{0^2+1^2+3^2+(-1)^2+0^2+(-3)^2}{6}=\dfrac{10}{3}$

B 선수의 득점의 평균이 19점이므로

(분산)$=\dfrac{(-1)^2+0^2+2^2+(-4)^2+3^2+0^2}{6}=5$

즉, 6일 동안의 연습 경기에서 A 선수의 분산이 B 선수의 분산보다 작으므로 A 선수가 B 선수보다 더 안정적으로 득점을 하였다.

따라서 전국 농구 대회에는 A 선수가 출전하게 된다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 15~16

01 32 **02** 98점 **03** $x\geq9$ **04** 6 **05** 13.5 **06** 6, 6
07 20 **08** 440개

01 길잡이 가장 큰 변량과 가장 작은 변량을 각각 a, b로 놓고, 서로 다른 10개의 변량의 총합에 관한 식을 세운다.

가장 큰 변량을 a, 가장 작은 변량을 b라 하고, a, b를 포함한 서로 다른 10개의 변량의 총합을 S라 하면

$S=a+9\times30=b+9\times35$

$\therefore\ a-b=45 \quad \cdots$ ㉠

또 가장 큰 변량과 가장 작은 변량의 합이 55이므로

$a+b=55 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=50$, $b=5$

따라서 서로 다른 10개의 변량의 평균은

$\dfrac{50+9\times30}{10}=\dfrac{320}{10}=32$

02 길잡이 3학년 2학기 수학 성적을 x점이라 하고 학년별 성적과 학년별 반영 비율을 각각 곱하여 종합 성적을 계산한다.

3학년 2학기 수학 성적을 x점이라 하고 수학 과목의 학년별 성적을 구하면

(1학년)$=\dfrac{96+88}{2}=92$(점), (2학년)$=\dfrac{75+85}{2}=80$(점),

(3학년)$=\dfrac{94+x}{2}$(점)

1학년, 2학년, 3학년의 반영 비율이 각각 30 %, 30 %, 40 %이므로 수학 과목의 종합 성적이 90점 이상이 되려면

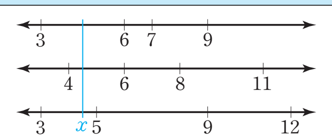
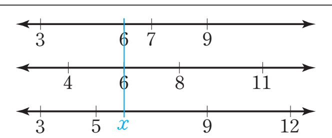
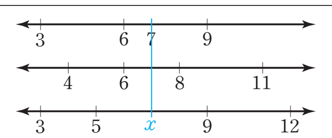
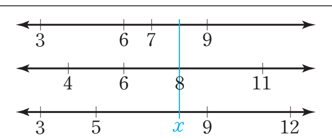
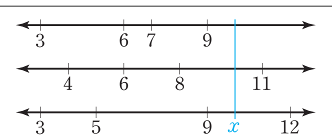
$92\times\dfrac{30}{100}+80\times\dfrac{30}{100}+\dfrac{94+x}{2}\times\dfrac{40}{100}\ge90$

$94+x\ge192 \qquad \therefore\ x\ge98$

따라서 3학년 2학기 수학 성적은 98점 이상이 되어야 한다.

03 길잡이 세 자료 A, B, C에서 각각 x를 제외한 나머지 4개의 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열한 후, 자연수 x의 값의 범위에 따른 세 자료의 중앙값을 구해 본다.

다음과 같이 자연수 x의 값의 범위를 나누어 생각해 볼 수 있다.

x의 값의 범위	수직선 위에 나타낸 변량	중앙값
$1\le x\le5$		$a=6$ $b=6$ $c=5$
$x=6$		$a=6$ $b=6$ $c=6$
$x=7$		$a=7$ $b=7$ $c=7$
$x=8$		$a=7$ $b=8$ $c=8$
$x\ge9$		$a=7$ $b=8$ $c=9$

따라서 $a<b<c$가 성립하도록 하는 자연수 x의 값의 범위는 $x\ge9$이다.

04 길잡이 추가한 변량과 5개의 변량의 평균을 각각 x, m으로 놓고, (편차의 합)$=0$, (분산)$=4.4$임을 이용한다.

추가한 변량을 x, 5개의 변량의 평균을 m이라 하면 분산이 4.4이므로

$\dfrac{(6-m)^2+(5-m)^2+(11-m)^2+(7-m)^2+(x-m)^2}{5}=4.4$

$(6-m)^2+(5-m)^2+(11-m)^2+(7-m)^2+(x-m)^2=22$

$x^2-2mx+5m^2-58m+209=0 \quad \cdots$ ㉠

이때 편차의 합은 0이므로

$(6-m)+(5-m)+(11-m)+(7-m)+(x-m)=0$

$29-5m+x=0 \qquad \therefore\ x=5m-29 \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(5m-29)^2-2m(5m-29)+5m^2-58m+209=0$

$20m^2-290m+1050=0$, $2m^2-29m+105=0$

$(m-7)(2m-15)=0 \qquad \therefore\ m=7$ 또는 $m=\dfrac{15}{2} \quad \cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x=6$ 또는 $x=\dfrac{17}{2}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=6$

05 길잡이 12개의 모서리의 길이의 평균과 표준편차에 관한 식을 각각 세운 후, 곱셈 공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$를 이용한다.

12개의 모서리의 길이의 평균이 4이므로

$\dfrac{4a+4b+4c}{12}=4$에서 $4a+4b+4c=48$

$\therefore\ a+b+c=12 \quad \cdots$ ㉠

표준편차가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{4\{(a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2\}}{12}=(\sqrt{5})^2$에서

$(a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2=15$

$a^2+b^2+c^2-8(a+b+c)+48=15$

$a^2+b^2+c^2-8\times12+48=15$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=63 \quad \cdots$ ㉡

6개의 면의 넓이의 합은 $2ab+2bc+2ca$이고,

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$이므로

$2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=12^2-63=81$ ($\because$ ㉠, ㉡)

따라서 6개의 면의 넓이의 평균은

$\dfrac{2ab+2bc+2ca}{6}=\dfrac{81}{6}=13.5$

06 길잡이 두 조각인 D종이의 넓이를 각각 x, $12-x$로 놓고, 평균과 분산에 관한 식을 각각 세운다.

D종이를 넓이가 각각 x, $12-x$인 두 조각으로 자르면 다섯 장의 종이의 넓이 5, 6, 7, x, $12-x$의 평균은

$\dfrac{5+6+7+x+(12-x)}{5}=\dfrac{30}{5}=6$

이때 x, $12-x$와 평균 6의 차가 작을수록 표준편차는 작아지므로 $x=6$, $12-x=6$일 때 다섯 장의 종이의 넓이의 표준편차가 최소가 된다.

따라서 자른 두 조각의 넓이는 각각 6, 6이다.

다른 풀이 D종이를 넓이가 각각 x, $12-x$인 두 조각으로 자르면 다섯 장의 종이의 넓이는 5, 6, 7, x, $12-x$이므로

$$(\text{평균})=\frac{5+6+7+x+(12-x)}{5}=\frac{30}{5}=6$$

이때 각 변량의 편차를 차례로 구하면

-1, 0, 1, $x-6$, $6-x$이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-1)^2+0^2+1^2+(x-6)^2+(6-x)^2}{5}=\frac{2(x-6)^2+2}{5}$$

이때 표준편차가 최소가 되려면 분산이 최소이어야 하므로 $x=6$일 때 표준편차는 최소가 된다.

따라서 자른 두 조각의 넓이는 각각 6, 6이다.

07 **길잡이** 5개의 변량의 평균과 표준편차에 관한 식을 각각 세운 후 x에 대한 이차함수 $f(x)$의 식에 대입하여 정리한다.

5개의 변량 a, b, c, d, e의 평균이 3이므로

$\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=3$에서 $a+b+c+d+e=15$

표준편차가 2이므로

$\dfrac{(a-3)^2+(b-3)^2+(c-3)^2+(d-3)^2+(e-3)^2}{5}=2^2$에서

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-6(a+b+c+d+e)+45=20$

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-6\times15+45=20$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=65$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=(a-x)^2+(b-x)^2+(c-x)^2+(d-x)^2+(e-x)^2\\&=5x^2-2(a+b+c+d+e)x+a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\\&=5x^2-30x+65=5(x-3)^2+20\end{aligned}$$

따라서 이차함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 20을 가진다.

08 **길잡이** 생산 라인의 수를 n개, 각 생산 라인에서 하루 동안 제조하는 제품의 수를 각각 a_1개, $\cdots$, a_n개라 하고, 주문량이 많아지기 전과 후의 평균과 분산에 관한 식을 각각 세운다.

공장의 생산 라인의 수를 n개, 각 생산 라인에서 하루 동안 제조하는 제품의 수를 각각 a_1개, a_2개, $\cdots$, a_n개라 하면 평균은

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=180$(개)

표준편차가 3개이므로 분산은

$\dfrac{(a_1-180)^2+(a_2-180)^2+\cdots+(a_n-180)^2}{n}=3^2$

주문량이 많아진 후의 각 생산 라인에서 하루 동안 제조해야 하는 제품의 수는 각각 (xa_1+y)개, (xa_2+y)개, $\cdots$, (xa_n+y)개이므로

$$\begin{aligned}(\text{평균})&=\frac{(xa_1+y)+(xa_2+y)+\cdots+(xa_n+y)}{n}\\&=\frac{x(a_1+a_2+\cdots+a_n)+ny}{n}=x\times\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+y\\&=180x+y=400 \quad\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

주문량이 많아진 후의 표준편차가 6개이므로

$$\begin{aligned}(\text{분산})&=\frac{1}{n}\times\{(xa_1+y-180x-y)^2+(xa_2+y-180x-y)^2+\\&\qquad\cdots+(xa_n+y-180x-y)^2\}\\&=\frac{x^2(a_1-180)^2+x^2(a_2-180)^2+\cdots+x^2(a_n-180)^2}{n}\\&=x^2\left\{\frac{(a_1-180)^2+(a_2-180)^2+\cdots+(a_n-180)^2}{n}\right\}\\&=9x^2=6^2 \quad\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉡에서 $x^2=4$, $x=2$ ($\because\ x>0$)

㉠에서 $180\times2+y=400$, $y=40$

따라서 평소에 하루 동안 200개를 제조하던 생산 라인에서 주문량이 많아진 후 제조하는 제품의 수는

$2\times200+40=440$(개)

서술형 완성하기 P. 17~18

1 200 cm **2** (1) 20500원, 9500원, 없다. (2) 중앙값
3 3 **4** A 모둠 **5** 12분 **6** 29
7 풀이 참조

1 4개의 선분의 길이를 각각

a cm, b cm, c cm, d cm라 하면 $\cdots$ (i)

$\dfrac{a+b+c+d}{4}=40$에서 $a+b+c+d=160$ $\cdots$ (ii)

따라서 각 선분을 한 변으로 하는 정오각형 4개의 둘레의 길이의 평균은

$\dfrac{5(a+b+c+d)}{4}=\dfrac{5\times160}{4}=200$ (cm) $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) 4개의 선분의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm, d cm로 놓기	20 %
(ii) $a+b+c+d$의 값 구하기	30 %
(iii) 정오각형 4개의 둘레의 길이의 평균 구하기	50 %

2 (1) $(\text{평균})=\dfrac{10000+5000+80000+7000+12000+9000}{6}$

$=\dfrac{123000}{6}=20500$(원) $\cdots$ (i)

자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

5000원, 7000원, 9000원, 10000원, 12000원, 80000원

이므로 $(\text{중앙값})=\dfrac{9000+10000}{2}=9500$(원) $\cdots$ (ii)

각 자료의 값의 도수가 1로 모두 같으므로 최빈값은 없다. $\cdots$ (iii)

(2) 주어진 자료에서 최빈값은 없고, 80000원과 같이 다른 자료의 값과 비교하여 매우 큰 값, 즉 극단적인 값이 존재하므로 이 자료는 평균보다 중앙값이 대푯값으로 가장 적절하다. $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) 평균 구하기	30 %
(ii) 중앙값 구하기	30 %
(iii) 최빈값 구하기	20 %
(iv) 대푯값으로 가장 적절한 것 구하기	20 %

3 8, 4를 제외한 나머지 3개의 변량을 각각 a, b, c라 하면 5개의 변량 a, b, c, 9, 3의 평균이 6이므로

$\dfrac{a+b+c+9+3}{5}=6$ $\quad\therefore\ a+b+c=18$ $\cdots$ (i)

분산이 5이므로

$\dfrac{(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(9-6)^2+(3-6)^2}{5}=5$

$\therefore\ (a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2=7$ $\cdots$ (ii)

따라서 5개의 변량 a, b, c, 8, 4의 평균과 분산을 각각 구하면

$$(\text{평균})=\frac{a+b+c+8+4}{5}=\frac{18+8+4}{5}=6 \qquad \cdots\text{(iii)}$$

$$(\text{분산})=\frac{(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2}{5}$$

$$=\frac{7+4+4}{5}=3 \qquad \cdots\text{(iv)}$$

채점 기준	배점
(i) 8, 4를 제외한 나머지 세 변량 a, b, c의 합 구하기	20 %
(ii) $(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2$의 값 구하기	20 %
(iii) 5개의 변량의 평균 구하기	30 %
(iv) 5개의 변량의 분산 구하기	30 %

4 A 모둠의 평균과 분산을 각각 구하면

$$(\text{평균})=\frac{5\times1+15\times2+25\times4+35\times3}{10}=\frac{240}{10}=24(\text{개})$$

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-19개, -9개, 1개, 11개이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-19)^2\times1+(-9)^2\times2+1^2\times4+11^2\times3}{10}$$

$$=\frac{890}{10}=89 \qquad \cdots\text{(i)}$$

B 모둠의 평균과 분산을 각각 구하면

$$(\text{평균})=\frac{5\times5+15\times2+25\times2+35\times1}{10}=\frac{140}{10}=14(\text{개})$$

각 계급의 편차를 차례로 구하면 -9개, 1개, 11개, 21개이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-9)^2\times5+1^2\times2+11^2\times2+21^2\times1}{10}$$

$$=\frac{1090}{10}=109 \qquad \cdots\text{(ii)}$$

따라서 A 모둠의 분산이 B 모둠의 분산보다 작으므로 A 모둠의 제기차기 기록이 B 모둠보다 더 고르다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) A 모둠의 평균, 분산 각각 구하기	각 20 %
(ii) B 모둠의 평균, 분산 각각 구하기	각 20 %
(iii) 제기차기 기록의 분포가 더 고른 모둠 구하기	20 %

5 대화 시간이 25분 이상 35분 미만인 계급의 도수를 x명이라 하면

$7+x+9+5+3=35$이므로 $x=11$ … (i)

$$(\text{평균})=\frac{20\times7+30\times11+40\times9+50\times5+60\times3}{35}$$

$$=\frac{1260}{35}=36(\text{분}) \qquad \cdots\text{(ii)}$$

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-16분, -6분, 4분, 14분, 24분이므로

$$(\text{분산})=\frac{(-16)^2\times7+(-6)^2\times11+4^2\times9+14^2\times5+24^2\times3}{35}$$

$$=\frac{5040}{35}=144 \qquad \cdots\text{(iii)}$$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{144}=12$(분) … (iv)

채점 기준	배점
(i) 25분 이상 35분 미만인 계급의 도수 구하기	10 %
(ii) 평균 구하기	30 %
(iii) 분산 구하기	40 %
(iv) 표준편차 구하기	20 %

6 20개의 변량 x_1, x_2, $\cdots$, x_{20}의 평균이 5이므로

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{20}}{20}=5$$

$\therefore$ $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=100$ … (i)

표준편차가 2이므로

$$(\text{분산})=\frac{(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+\cdots+(x_{20}-5)^2}{20}$$

$$=\frac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2)-10(x_1+x_2+\cdots+x_{20})+20\times5^2}{20}$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2}{20}-\frac{10(x_1+x_2+\cdots+x_{20})}{20}+5^2$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2}{20}-\frac{10\times100}{20}+5^2$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2}{20}-25=2^2 \qquad \cdots\text{(ii)}$$

$$\therefore (\text{구하는 평균})=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2}{20}$$

$$=4+25=29 \qquad \cdots\text{(iii)}$$

채점 기준	배점
(i) $x_1+x_2+\cdots+x_{20}$의 값 구하기	20 %
(ii) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2$에 관한 식을 세우고 정리하기	50 %
(iii) 20개의 변량 x_1^2, x_2^2, $\cdots$, x_{20}^2의 평균 구하기	30 %

7 |예시 답안|

제시된 기사문에 따라 두 학생이 3일 동안의 식품 목록을 작성할 때 남학생인 현우는 청소년 1일 철분(Fe) 권장량인 15 mg에 맞게 작성해야 하고, 여학생인 수지는 17 mg에 맞게 작성해야 한다. … (i)

현우의 식품 목록에서 철분(Fe)의 양의 평균과 분산을 각각 구하면

$$(\text{평균})=\frac{16.8+(14.2+1.4)+(4.2+8.4)}{3}$$

$$=\frac{45}{3}=15\,(\text{mg})$$

$$(\text{분산})=\frac{1.8^2+0.6^2+(-2.4)^2}{3}=\frac{9.36}{3}=3.12 \qquad \cdots\text{(ii)}$$

수지의 식품 목록에서 철분(Fe)의 양의 평균과 분산을 각각 구하면

$$(\text{평균})=\frac{(8.5+8.4)+17+(7.1+10)}{3}$$

$$=\frac{51}{3}=17\,(\text{mg})$$

$$(\text{분산})=\frac{(-0.1)^2+0^2+0.1^2}{3}=\frac{0.02}{3} \qquad \cdots\text{(iii)}$$

따라서 3일 동안의 식품 목록에서 철분(Fe)의 섭취에 대한 분산은 현우보다 수지가 더 작으므로 철분(Fe)을 더 고르게 섭취하도록 식품 목록을 작성한 학생은 수지이다. … (iv)

채점 기준	배점
(i) 현우와 수지에게 맞는 청소년 1일 철분(Fe) 권장량 확인하기	10 %
(ii) 현우의 식품 목록에서 철분(Fe)의 양의 평균, 분산 각각 구하기	각 20 %
(iii) 수지의 식품 목록에서 철분(Fe)의 양의 평균, 분산 각각 구하기	각 20 %
(iv) 철분(Fe)을 더 고르게 섭취하도록 식품 목록을 작성한 학생 말하기	10 %

단원 마무리하기 P. 19~22

1 ②, ⑤ 2 ④ 3 97점 4 ③ 5 ③ 6 ⑤
7 13 8 14점, 16점 9 0 10 ②
11 (평균)=(중앙값)=(최빈값) 12 ② 13 ① 14 ④
15 ⑤ 16 ② 17 $\sqrt{3.5}$ 18 20, 과정은 풀이 참조
19 ⑤ 20 ③ 21 ④ 22 ② 23 $2\sqrt{2}$분
24 $\sqrt{3}$, 과정은 풀이 참조

1 ② 학급 회장은 다수의 득표로 뽑는 것이므로 대푯값으로 가장 적절한 것은 최빈값이다.
⑤ 자료의 값 중에서 극단적인 값이 있는 경우에는 평균보다 중앙값이 그 자료의 중심 경향을 더 잘 나타내어 주므로 대푯값으로 가장 적절한 것은 중앙값이다.
따라서 적절하지 않은 것은 ②, ⑤이다.

2 $13+x+y+6=30$이므로 $x+y=11$ $\cdots$ ㉠
(평균)$=\dfrac{10\times13+20\times x+30\times y+40\times6}{30}=21$(점)이므로
$20x+30y=260$ $\quad\therefore 2x+3y=26$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=7$, $y=4$
$\therefore xy=7\times4=28$

3 나머지 4개 과목의 평균을 x점이라 하면 4개 과목의 점수의 합은 $4x$점이므로 11개 과목의 평균이 90점 이상이 되려면
$\dfrac{7\times86+4x}{11}\ge90$, $602+4x\ge990$, $4x\ge388$ $\quad\therefore x\ge97$
따라서 4개 과목의 성적의 평균은 97점 이상이어야 한다.

4 (평균)$=\dfrac{1.4+1.8+0.6+1.5+x+0.5+0.8+2}{8}$
$=\dfrac{8.6+x}{8}=1.2\,(\text{mm})$
이므로 $8.6+x=9.6$ $\quad\therefore x=1$
자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 4번째와 5번째 자료의 값의 평균이 중앙값이므로
(중앙값)$=\dfrac{1+1.4}{2}=1.2\,(\text{mm})$

5 회원 5명의 키의 중앙값이 156 cm이므로 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 3번째 회원의 키는 156 cm이다.
따라서 키가 168 cm인 한 명의 신입 회원이 가입했을 때, 3번째와 4번째 자료의 값의 평균이 중앙값이므로
(중앙값)$=\dfrac{156+160}{2}=158\,(\text{cm})$

6 ㈎ 중앙값이 12이므로 4개의 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 2번째와 3번째 자료의 값의 평균이 12이어야 한다. 이때 10과 14의 평균이 12이므로 $a\ge14$
㈏ 중앙값이 17이므로 5개의 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 3번째 자료의 값이 17이어야 한다. $\quad\therefore a\le17$
따라서 두 조건 ㈎, ㈏를 모두 만족하는 자연수 a의 값의 범위는 $14\le a\le17$이므로 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

7 자료 A의 중앙값이 11이므로 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, $a+4$는 10과 15 사이에 있어야 하므로
$\dfrac{10+(a+4)}{2}=11$ $\quad\therefore a=8$
따라서 두 자료 A, B를 섞은 전체 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 6번째와 7번째 자료의 값의 평균이 중앙값이므로
(전체 자료의 중앙값)$=\dfrac{12+14}{2}=13$

8 자료의 개수가 30개이므로
$1+4+7+a+6+5=30$ $\quad\therefore a=7$
14점과 16점의 도수가 7명으로 가장 크므로 최빈값은 14점, 16점이다.

9 13세와 20세의 도수가 2명으로 가장 크므로 평균은 13세 또는 20세이다.
(i) 평균이 13세인 경우
$\dfrac{9+12+13+13+20+20+(20+a)+25+33+35}{10}=13$
$200+a=130$ $\quad\therefore a=-70$
그런데 a는 0 또는 한 자리의 자연수이어야 하므로
$a\ne-70$
(ii) 평균이 20세인 경우
$\dfrac{9+12+13+13+20+20+(20+a)+25+33+35}{10}=20$
$200+a=200$ $\quad\therefore a=0$
즉, 평균과 최빈값이 20세로 같으므로 조건을 만족한다.
따라서 (i), (ii)에서 a의 값은 0이다.

10 ㄱ. A반의 점수의 평균을 구하면
(평균)$=\dfrac{0\times4+2\times5+4\times15+6\times11+8\times8+10\times3}{46}$
$=\dfrac{230}{46}=5$(점)
B반의 점수의 평균을 구하면
(평균)$=\dfrac{0\times2+2\times3+4\times12+6\times9+8\times9+10\times5}{40}$
$=\dfrac{230}{40}=5.75$(점)
따라서 B반의 평균은 A반의 평균보다 높다.
ㄴ, ㄷ A, B 두 반의 자료에서 4점의 도수가 각각 15명, 12명으로 가장 크므로 최빈값은 4점의 1개씩이고 두 반의 최빈값은 4점으로 같다.
ㄹ. A반의 학생 수는 총 46명이므로 중앙값은 23번째와 24번째 자료의 값의 평균이다. $\quad\therefore$ (중앙값)$=\dfrac{4+4}{2}=4$(점)
B반의 학생 수는 총 40명이므로 중앙값은 20번째와 21번째 자료의 값의 평균이다. $\quad\therefore$ (중앙값)$=\dfrac{6+6}{2}=6$(점)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 책의 권수가 3권을 중심으로 좌우 대칭이므로 이 자료의 평균과 중앙값은 3권이고, 3권의 도수가 5명으로 가장 크므로 최빈값도 3권이다.
$\therefore$ (평균)=(중앙값)=(최빈값)

12 ㄱ. (반례) 변량 2, 4, 6, 8의 중앙값은 5이므로 주어진 자료의 값 중에 존재하지 않는다.

ㄴ. (반례) 자료 A가 0, 3, 6이고 자료 B가 2, 2, 5일 때, 두 자료의 평균은 3으로 서로 같지만 분산은 각각 6, 2로 다르므로 자료가 흩어져 있는 정도가 다르다.

ㄹ. 변량들이 평균으로부터 멀리 흩어져 있을수록 산포도는 크다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

13 6명의 국어 성적의 평균이 75점이므로 점수의 총합은

$6\times75=450$(점)

국어 성적이 75점인 혜원이가 전학을 간 후 나머지 5명의 평균은

$\frac{450-75}{5}=75$(점)

이때 6명의 국어 성적의 (편차)^{2}의 합은 $6\times10=60$이고, 혜원이의 국어 성적은 평균과 같으므로 혜원이의 국어 성적의 편차는 0이다.

따라서 혜원이가 전학을 간 후 나머지 5명의 분산은

$\frac{60-0^2}{5}=12$

14 (어떤 계급의 도수)=(전체 도수)×(그 계급의 상대도수)이므로 주어진 상대도수의 분포표를 도수분포표로 나타내면 다음과 같다.

봉사 활동 시간(분)	상대도수	도수(명)
$0^{이상}\sim20^{미만}$	0.15	$20\times0.15=3$
$20\sim40$	0.2	$20\times0.2=4$
$40\sim60$	0.4	$20\times0.4=8$
$60\sim80$	0.25	$20\times0.25=5$
합계	1	20

$\therefore$ (평균)$=\frac{10\times3+30\times4+50\times8+70\times5}{20}$

$=\frac{900}{20}=45$(분)

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-35분, -15분, 5분, 25분이므로

(분산)$=\frac{(-35)^2\times3+(-15)^2\times4+5^2\times8+25^2\times5}{20}$

$=\frac{7900}{20}=395$

15 a, b, c, d의 평균이 3이고, 분산이 10이므로

$\frac{a+b+c+d}{4}=3$

$\frac{(a-3)^2+(b-3)^2+(c-3)^2+(d-3)^2}{4}=10$

($2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$의 평균)

$=\frac{(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)}{4}$

$=\frac{2(a+b+c+d)+4}{4}$

$=2\times\frac{a+b+c+d}{4}+1$

$=2\times3+1$

$=7$

($2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$의 분산)

$=\frac{(2a+1-7)^2+(2b+1-7)^2+(2c+1-7)^2+(2d+1-7)^2}{4}$

$=\frac{(2a-6)^2+(2b-6)^2+(2c-6)^2+(2d-6)^2}{4}$

$=\frac{4\{(a-3)^2+(b-3)^2+(c-3)^2+(d-3)^2\}}{4}$

$=4\times10=40$

참고 변화된 변량의 평균, 분산 구하기

($2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$의 평균)

$=2\times$(a, b, c, d의 평균)$+1$

($2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$의 분산)

$=2^2\times$(a, b, c, d의 분산)

16 편차의 합은 0이므로

$(-3)+x+y+0+1=0$에서 $x+y=2$

표준편차가 $\sqrt{6}$회이므로

$\frac{(-3)^2+x^2+y^2+0^2+1^2}{5}=(\sqrt{6})^2$에서 $x^2+y^2=20$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$2^2=20+2xy$ $\quad\therefore xy=-8$

17 평균이 7이므로

$\frac{a+4+7+10+b+8+5+6}{8}=7$에서 $a+b+40=56$

$\therefore a+b=16$

또 중앙값이 7이므로 a, b 중 적어도 하나는 7이어야 한다.

(i) $a=7$이면 $b=9$ (ii) $b=7$이면 $a=9$

그런데 $a>b$이므로 $a=9$, $b=7$

따라서 각 변량의 편차를 구하면

2, -3, 0, 3, 0, 1, -2, -1이므로

(분산)$=\frac{2^2+(-3)^2+0^2+3^2+0^2+1^2+(-2)^2+(-1)^2}{8}$

$=\frac{28}{8}=3.5$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{3.5}$

18 자료를 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 10번째와 11번째 자료의 값이 속하는 계급의 계급값의 평균이 중앙값이므로

$a=\frac{50+50}{2}=50$ ⋯ (i)

이용 시간이 40분 이상 60분 미만인 계급의 도수가 9명으로 가장 크므로 최빈값은 이 계급의 계급값인 50분이다.

$\therefore b=50$ ⋯ (ii)

(평균)$=\frac{10\times1+30\times5+50\times9+70\times3+90\times2}{20}$

$=\frac{1000}{20}=50$(분)

각 계급의 편차를 차례로 구하면

-40분, -20분, 0분, 20분, 40분이므로

(분산)$=\frac{(-40)^2\times1+(-20)^2\times5+0^2\times9+20^2\times3+40^2\times2}{20}$

$=\frac{8000}{20}=400$

따라서 표준편차는 $\sqrt{400}=20$(분)이므로 $c=20$ $\cdots$ (iii)

$\therefore$ $a-b+c=50-50+20=20$ $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) a의 값 구하기	30 %
(ii) b의 값 구하기	30 %
(iii) c의 값 구하기	30 %
(iv) $a-b+c$의 값 구하기	10 %

19 남학생 10명의 분산이 6이므로 남학생의 휴대전화에 저장된 mp3 파일의 개수에 대한 $(편차)^2$의 합은

$6\times10=60$

여학생 10명의 분산이 8이므로 여학생의 휴대전화에 저장된 mp3 파일의 개수에 대한 $(편차)^2$의 합은

$8\times10=80$

따라서 전체 학생 20명의 $(편차)^2$의 합은 $60+80=140$이므로

$(분산)=\dfrac{140}{20}=7$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{7}$(개)

20 3회, 4회의 점수를 각각 a점, b점이라 하면

$(평균)=\dfrac{7+10+a+b+9+10}{6}=9$(점)이므로

$a+b=18$ $\cdots$ ㉠

각 변량의 편차를 차례로 구하면

-2점, 1점, $(a-9)$점, $(b-9)$점, 0점, 1점이므로

$(분산)=\dfrac{(-2)^2+1^2+(a-9)^2+(b-9)^2+0^2+1^2}{6}$

$=\dfrac{(a-9)^2+(b-9)^2+6}{6}$

이때 표준편차가 가장 작으려면 분산이 가장 작아야 하므로 $(a-9)^2+(b-9)^2+6$의 값이 최소이면 된다.

㉠을 만족하는 자연수 a, b에 대하여 $(a-9)^2+(b-9)^2+6$의 값이 가장 작을 때는 $a=9$, $b=9$일 때이므로 표준편차가 가장 작게 나오도록 하는 3회, 4회의 점수는 각각 9점이다.

다른 풀이 ㉠에서 $a=18-b$이므로

$(a-9)^2+(b-9)^2+6=(18-b-9)^2+(b-9)^2+6$

$=2(b-9)^2+6$

따라서 $b=9$일 때 $2(b-9)^2+6$의 값이 최소이므로 ㉠에서 $a=9$, $b=9$일 때 표준편차가 가장 작다.

즉, 표준편차가 가장 작도록 하는 3회, 4회의 점수는 각각 9점이다.

21 A가 얻은 점수는 7점, 7점, 8점, 9점, 9점이므로

$(A의\ 평균)=\dfrac{7+7+8+9+9}{5}=\dfrac{40}{5}=8$(점)

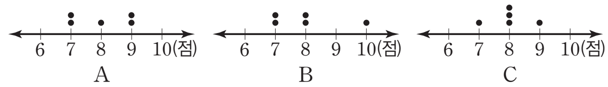
B가 얻은 점수는 7점, 7점, 8점, 8점, 10점이므로

$(B의\ 평균)=\dfrac{7+7+8+8+10}{5}=\dfrac{40}{5}=8$(점)

C가 얻은 점수는 7점, 8점, 8점, 8점, 9점이므로

$(C의\ 평균)=\dfrac{7+8+8+8+9}{5}=\dfrac{40}{5}=8$(점)

즉, A, B, C 세 사람의 평균은 모두 8점으로 같고, 점수의 분포를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 평균 8점을 중심으로 점수의 흩어진 정도가 가장 작은 사람은 C이고, 점수의 흩어진 정도가 가장 큰 사람은 B이므로 점수가 가장 고른 사람부터 차례로 나열하면 C, A, B이다.

22 ①, ⑤ 각 반의 학생 수를 알 수 없으므로 $(편차)^2$의 합도 비교할 수 없다.

② 2반의 한문 성적의 표준편차가 가장 작으므로 한문 성적이 가장 고른 반은 2반이다.

③ 4반은 6반보다 한문 성적의 표준편차가 더 작으므로 산포도가 더 작다.

④ 5반의 한문 성적의 평균이 가장 크므로 한문 성적이 가장 우수한 반은 5반이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

23 편차의 합은 0이므로

$2+(x-2)+(-x)+(-1)+(2x+7)=0$에서

$2x+6=0$ $\quad\therefore\ x=-3$

이때 B, C, E의 편차는 각각 -5분, 3분, 1분이므로

$(분산)=\dfrac{2^2+(-5)^2+3^2+(-1)^2+1^2}{5}$

$=\dfrac{40}{5}=8$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$(분)

24 한 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 정육면체 모양의 세 주사위의 모든 모서리의 길이의 총합은 72이므로

$12(a+b+c)=72$

$\therefore$ $a+b+c=6$ $\cdots$ (i)

겉넓이의 총합은 126이므로

$6(a^2+b^2+c^2)=126$

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2=21$ $\cdots$ (ii)

이때 모서리의 길이 a, b, c의 평균과 분산을 각각 구하면

$(평균)=\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{6}{3}=2$ $\cdots$ (iii)

$(분산)=\dfrac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+4\times3}{3}$

$=\dfrac{21-4\times6+12}{3}$

$=\dfrac{9}{3}=3$ $\cdots$ (iv)

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{3}$ $\cdots$ (v)

채점 기준	배점
(i) $a+b+c$의 값 구하기	10 %
(ii) $a^2+b^2+c^2$의 값 구하기	10 %
(iii) a, b, c의 평균 구하기	20 %
(iv) a, b, c의 분산 구하기	40 %
(v) a, b, c의 표준편차 구하기	20 %

Ⅱ 피타고라스 정리

1 피타고라스 정리

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 24~26

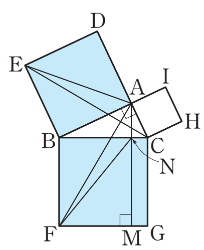
1 16	**2** $\sqrt{26}$	**3** $126\,\text{cm}^2$	**4** 5
5 48 cm	**6** ㄷ, ㅂ	**7** $\sqrt{161}$, 17	**8** $6<x<2\sqrt{13}$
9 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$	**10** $\frac{15}{4}$	**11** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$	**12** $4\sqrt{7}$
13 $2\sqrt{30}$	**14** $\sqrt{19}$	**15** 16 cm	**16** 15 cm

1 $x^2+12^2=(x+4)^2$, $x^2+144=x^2+8x+16$
$8x=128$ $\quad\therefore x=16$

2 $\overline{BD}$를 그으면 $\triangle ABD$에서 $\overline{BD}=\sqrt{7^2+11^2}=\sqrt{170}$
$\triangle BCD$에서 $\overline{CD}=\sqrt{(\sqrt{170})^2-12^2}=\sqrt{26}$

3 $\triangle ABD$에서 $\overline{AD}=\sqrt{15^2-9^2}=\sqrt{144}=12\,(\text{cm})$
$\triangle ADC$에서 $\overline{CD}=\sqrt{(12\sqrt{2})^2-12^2}=\sqrt{144}=12\,(\text{cm})$
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times(9+12)\times 12=126\,(\text{cm}^2)$

4 오른쪽 그림에서 $\overline{BE}/\!/\overline{CD}$이므로
$\triangle EBC=\triangle EBA$이고
$\overline{AB}=\overline{EB}$, $\overline{BF}=\overline{BC}$
$\angle ABF=90^\circ+\angle ABC=\angle EBC$
이므로 $\triangle ABF\equiv\triangle EBC$ (SAS 합동)
또 점 A에서 $\overline{BC}$에 그은 수선이 $\overline{BC}$, $\overline{FG}$와 만나는 점을 차례로 N, M이라 하면 $\overline{BF}/\!/\overline{AM}$이므로



$\triangle ABF=\triangle BFN=\frac{1}{2}\square BFMN$
즉, $\square ADEB=\square BFMN$이고
이와 마찬가지로 $\square ACHI=\square NMGC$
따라서 $\square ADEB+\square ACHI=\square BFGC$에서
$144+\square ACHI=169$, $\square ACHI=25$
$\therefore \overline{AC}=\sqrt{25}=5$

5 $\triangle AEH\equiv\triangle BFE\equiv\triangle CGF\equiv\triangle DHG$ (SAS 합동)이므로
$\square EFGH$는 $\overline{HE}=\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}$인 정사각형이다.
$\therefore \overline{EH}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\,(\text{cm})$
$\triangle AEH$에서 $\overline{AE}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=8\,(\text{cm})$이고
$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=8+4=12\,(\text{cm})$
$\therefore$ ($\square ABCD$의 둘레의 길이)$=4\times 12=48\,(\text{cm})$

6 ㄱ. $(4\sqrt{3})^2>4^2+4^2$이므로 둔각삼각형
ㄴ. $8^2<5^2+7^2$이므로 예각삼각형
ㄷ. $(2\sqrt{5})^2=2^2+4^2$이므로 직각삼각형
ㄹ. $8^2>6^2+(\sqrt{14})^2$이므로 둔각삼각형
ㅁ. $18^2<6^2+17^2$이므로 예각삼각형
ㅂ. $10^2=5^2+(5\sqrt{3})^2$이므로 직각삼각형
따라서 직각삼각형인 것은 ㄷ, ㅂ이다.

7 (ⅰ) 가장 긴 변의 길이가 15일 때,
$15^2=8^2+x^2$ $\quad\therefore x=\sqrt{161}\,(\because x>0)$
(ⅱ) 가장 긴 변의 길이가 x일 때,
$x^2=8^2+15^2$ $\quad\therefore x=17\,(\because x>0)$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 직각삼각형이 되도록 하는 x의 값은 $\sqrt{161}$, 17이다.

8 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계에서
$6-4<x<6+4$, $2<x<10$
이때 $x>6$이므로 $6<x<10$ $\quad\cdots$ ㉠
$\angle A<90^\circ$인 예각삼각형이므로
$x^2<6^2+4^2$, $x^2<52$ $\quad\therefore 0<x<2\sqrt{13}$ $\quad\cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $6<x<2\sqrt{13}$

9 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$이고
$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로
$2\times 6=2\sqrt{10}\times\overline{AH}$ $\quad\therefore \overline{AH}=\frac{12}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

10 $\triangle ABH$에서 $\overline{BH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$
$\triangle ABH\backsim\triangle CAH$ (AA 닮음)이므로 $\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{CH}$
$\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$, $3^2=4\times\overline{CH}$ $\quad\therefore \overline{CH}=\frac{9}{4}$
$\triangle AHC$에서 $x=\sqrt{3^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{225}{16}}=\frac{15}{4}$
다른 풀이 $\triangle ABH$에서 $\overline{BH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$
$\triangle ABC\backsim\triangle HBA$ (AA 닮음)이므로 $\overline{AB}:\overline{HB}=\overline{BC}:\overline{BA}$
$\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$, $5^2=4\times\overline{BC}$ $\quad\therefore \overline{BC}=\frac{25}{4}$
$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로 $5\times x=\frac{25}{4}\times 3$ $\quad\therefore x=\frac{15}{4}$

11 $\triangle ABC\backsim\triangle HBA$ (AA 닮음)이므로
$\overline{AB}:\overline{HB}=\overline{BC}:\overline{BA}$, $\overline{AB}^2=\overline{HB}\times\overline{BC}$
$6^2=\overline{HB}\times 12$ $\quad\therefore \overline{HB}=3$
$\therefore \overline{HM}=\overline{BM}-\overline{BH}=6-3=3$
$\triangle HBA\backsim\triangle HAC$ (AA 닮음)이므로
$\overline{BH}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{CH}$, $\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$
$\overline{AH}^2=3\times(3+6)=27$ $\quad\therefore \overline{AH}=3\sqrt{3}\,(\because \overline{AH}>0)$
$\therefore \triangle AHM=\frac{1}{2}\times\overline{HM}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

12 $\overline{DE}^2+\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CD}^2$이므로
$(3\sqrt{2})^2+\overline{AC}^2=7^2+9^2$, $\overline{AC}^2=112$
$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{7}\,(\because \overline{AC}>0)$

13 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$이므로
$12^2+5^2=\overline{BC}^2+7^2$, $\overline{BC}^2=120$
$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{30}\,(\because \overline{BC}>0)$

14 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$이므로
$\overline{AP}^2+9^2=6^2+8^2$, $\overline{AP}^2=19$
$\therefore$ $\overline{AP}=\sqrt{19}$ ($\because$ $\overline{AP}>0$)

15 (지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{12}{2}\right)^2$
$=18\pi$ (cm²)
(지름이 $\overline{BC}$인 반원의 넓이)
$=$(지름이 $\overline{AC}$인 반원의 넓이)$-$(지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이)
$=50\pi-18\pi=32\pi$ (cm²)
따라서 $\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2=32\pi$이므로
$\overline{BC}^2=256$ $\therefore$ $\overline{BC}=16$ (cm)($\because$ $\overline{BC}>0$)
다른 풀이 지름이 $\overline{AC}$인 반원의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2=50\pi$이므로
$\overline{AC}^2=400$ $\therefore$ $\overline{AC}=20$ (cm)($\because$ $\overline{AC}>0$)
따라서 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{20^2-12^2}=16$ (cm)

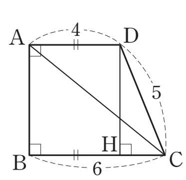
16 (색칠한 부분의 넓이)$=\triangle ABC$이므로
$\frac{1}{2}\times 9\times\overline{AC}=54$ $\therefore$ $\overline{AC}=12$ (cm)
$\therefore$ $\overline{BC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$ (cm)

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 27~31

1 $2\sqrt{13}$ cm **2** $\sqrt{57}$ **3** 5 cm **4** $(27+18\sqrt{2})$ cm²
5 $8\sqrt{7}$ **6** ④ **7** 50π **8** $2\sqrt{7}$ **9** $3\sqrt{2}-4$ **10** $2\sqrt{3}$
11 $\frac{66}{5}$ cm **12** ④ **13** $2\sqrt{33}$ **14** ④ **15** 126
16 $(50-25\sqrt{3})$ cm² **17** ⑤ **18** 3 **19** ② **20** ③
21 ⑤ **22** $\frac{168}{125}$ **23** $6\sqrt{2}$ **24** $4\sqrt{5}$ **25** ④
26 $3\sqrt{7}$ cm **27** 18π cm² **28** 58 cm²
29 $4\sqrt{15}$ km **30** 9 m

1 $\overline{AB}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$ (cm)
이때 점 M은 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로 외심이다.
따라서 $\overline{CM}=\overline{AM}=\overline{BM}$이므로
$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{13}=2\sqrt{13}$ (cm)

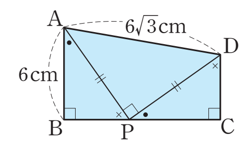
2 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=6-4=2$
$\triangle DHC$에서 $\overline{DH}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$
$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{DH}=\sqrt{21}$
따라서 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{21})^2+6^2}=\sqrt{57}$

3 $\triangle ABQ\equiv\triangle BCR\equiv\triangle CDS\equiv\triangle DAP$ (RHS 합동)에서
$\overline{AQ}=\overline{BR}=\overline{CS}=\overline{DP}$이고 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}$이므로
□PQRS는 $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}$인 정사각형이다.
이때 □PQRS$=49$ cm²이므로
$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}=\sqrt{49}=7$ (cm)
$\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=x$ cm라 하면
$\triangle APD$에서
$(x+7)^2+x^2=13^2$, $2x^2+14x-120=0$
$x^2+7x-60=0$, $(x+12)(x-5)=0$
$\therefore$ $\overline{AP}=x=5$ (cm)($\because$ $x>0$)

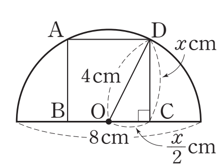
4 오른쪽 그림에서



$\triangle ABP\equiv\triangle PCD$이므로
$\overline{AP}=\overline{PD}$, $\angle APB=\angle PDC$
$\therefore$ $\angle APD$
$=180^\circ-(\angle APB+\angle DPC)$
$=180^\circ-(\angle PDC+\angle DPC)$
$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$
즉, $\triangle APD$는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{AP}^2+\overline{DP}^2=(6\sqrt{3})^2$, $2\overline{AP}^2=108$
$\overline{AP}^2=54$ $\therefore$ $\overline{AP}=3\sqrt{6}$ (cm)($\because$ $\overline{AP}>0$)
$\triangle ABP$에서
$\overline{BP}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2-6^2}=3\sqrt{2}$ (cm)
따라서 $\overline{PC}=\overline{AB}=6$ cm, $\overline{CD}=\overline{BP}=3\sqrt{2}$ cm이므로
□ABCD$=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{BC}$
$=\frac{1}{2}\times(6+3\sqrt{2})\times(3\sqrt{2}+6)$
$=\frac{1}{2}\times(54+36\sqrt{2})$
$=27+18\sqrt{2}$ (cm²)

5 $\overline{OP_1}=\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\cdots=\overline{P_7P_8}=x$라 하면
$\overline{OP_2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$
$\overline{OP_3}=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+x^2}=\sqrt{3}x$
$\overline{OP_4}=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+x^2}=\sqrt{4}x$
$\vdots$
$\overline{OP_8}=\sqrt{(\sqrt{7}x)^2+x^2}=\sqrt{8}x$
이때 $\overline{OP_8}=8\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{8}x=8\sqrt{2}$ $\therefore$ $x=4$
따라서 $\overline{OP_7}=\sqrt{7}x=4\sqrt{7}$이므로
$\triangle OP_8P_7=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{7}\times 4=8\sqrt{7}$

6 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 그으면



$\overline{OD}=\frac{1}{2}\times 8=4$ (cm)
정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x cm라 하면
$\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{x}{2}$ (cm)
$\triangle OCD$에서
$\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2=4^2$, $\frac{5}{4}x^2=16$

$x^2=\dfrac{64}{5}$　　$\therefore\ x=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\,(\because\ x>0)$

7 $\triangle$ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{12^2+16^2}=20$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=\triangle ABC+$(부채꼴 ACA′의 넓이)$-\triangle A'B'C$

$=$(부채꼴의 ACA′의 넓이)

$=\pi\times20^2\times\dfrac{45}{360}$

$=50\pi$

8 $\overline{AD}$가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=5\sqrt{3}:2\sqrt{3}=5:2$

따라서 $\overline{AB}=5a$, $\overline{AC}=2a\,(a>0)$라 하면

$\triangle$ABC에서

$(5\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2+(2a)^2=(5a)^2$

$21a^2=147$, $a^2=7$

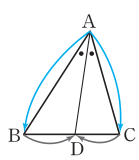
$\therefore\ a=\sqrt{7}\,(\because\ a>0)$

$\therefore\ \overline{AC}=2a=2\sqrt{7}$

참고 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

$\triangle$ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을 D라 할 때

⇨ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



9 오른쪽 그림의 $\triangle$APD에서

$\overline{DP}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{PC}=\overline{DC}-\overline{DP}=2-\sqrt{2}$

$\triangle$APD와 $\triangle$QPC에서

$\angle ADP=\angle QCP=90^\circ$,

$\angle APD=\angle QPC$(맞꼭지각)이므로

$\triangle APD\backsim\triangle QPC$(AA 닮음)

$\overline{DA}:\overline{CQ}=\overline{DP}:\overline{CP}$에서

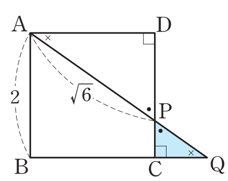
$2:\overline{CQ}=\sqrt{2}:(2-\sqrt{2})$

$\therefore\ \overline{CQ}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1)$

$\therefore\ \triangle PCQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{CQ}\times\overline{PC}$

$=\dfrac{1}{2}\times2(\sqrt{2}-1)\times(2-\sqrt{2})$

$=3\sqrt{2}-4$



10 $\triangle$ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$

$\triangle$ABC와 $\triangle$PQC에서

$\angle ABC=\angle PQC=90^\circ$, $\angle C$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle PQC$(AA 닮음)

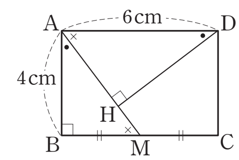
이때 $\triangle$ABC와 $\triangle$PQC의 넓이의 비가 $2:1$이므로

닮음비는 $\sqrt{2}:1$이다.

따라서 $\overline{AC}:\overline{PC}=\sqrt{2}:1$에서

$2\sqrt{6}:\overline{PC}=\sqrt{2}:1$　　$\therefore\ \overline{PC}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$

11 오른쪽 그림에서 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이므로



$\overline{BM}=\overline{CM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$

$=\dfrac{1}{2}\times6=3\,(\text{cm})$

$\triangle$ABM에서 $\overline{AM}=\sqrt{4^2+3^2}=5\,(\text{cm})$

$\triangle$ABM과 $\triangle$DHA에서 $\angle ABM=\angle DHA=90^\circ$,

$\angle BAM=90^\circ-\angle HAD=\angle HDA$이므로

$\triangle ABM\backsim\triangle DHA$(AA 닮음)

$\overline{BM}:\overline{HA}=\overline{AM}:\overline{DA}$에서

$3:\overline{HA}=5:6$　　$\therefore\ \overline{HA}=\dfrac{18}{5}\,(\text{cm})$

$\overline{AB}:\overline{DH}=\overline{AM}:\overline{DA}$에서

$4:\overline{DH}=5:6$　　$\therefore\ \overline{DH}=\dfrac{24}{5}\,(\text{cm})$

$\therefore$ ($\square$DHMC의 둘레의 길이)$=\overline{DH}+\overline{HM}+\overline{MC}+\overline{CD}$

$=\dfrac{24}{5}+\left(5-\dfrac{18}{5}\right)+3+4$

$=\dfrac{66}{5}\,(\text{cm})$

12 $\triangle$ABQ에서 $\overline{AQ}=\sqrt{10^2-8^2}=6\,(\text{cm})$

$\overline{QC}=\overline{AC}-\overline{AQ}=8-6=2\,(\text{cm})$

$\triangle$ABQ와 $\triangle$CPQ에서

$\overline{AB}/\!/\overline{PC}$이므로 $\angle BAQ=\angle PCQ=90^\circ$(엇각),

$\angle AQB=\angle CQP$(맞꼭지각)

$\therefore\ \triangle ABQ\backsim\triangle CPQ$(AA 닮음)

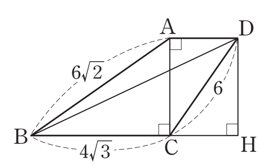
즉, $\overline{AB}:\overline{CP}=\overline{AQ}:\overline{CQ}$에서

$8:\overline{CP}=6:2$　　$\therefore\ \overline{CP}=\dfrac{8}{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle AQP=\dfrac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{CP}$

$=\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{8}{3}=8\,(\text{cm}^2)$

13 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$ABC에서



$\overline{AC}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

$\triangle$ACD에서

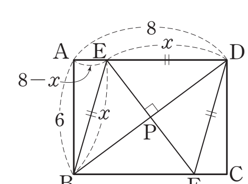
$\overline{AD}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$이고

$\overline{CH}=\overline{AD}=2\sqrt{3}$, $\overline{DH}=\overline{AC}=2\sqrt{6}$이므로

$\triangle$DBH에서

$\overline{BD}=\sqrt{(4\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{33}$

14 오른쪽 그림에서 $\overline{BE}=\overline{ED}=x$라 하면



$\overline{AE}=8-x$

$\triangle$ABE에서 $6^2+(8-x)^2=x^2$

$16x=100$　　$\therefore\ x=\dfrac{25}{4}$

$\overline{BD}$를 긋고 $\overline{EF}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하면

$\triangle$ABD에서 $\overline{BD}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이고

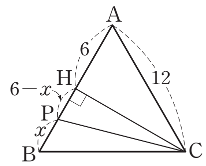
마름모 EBFD의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$\overline{EP}=\overline{FP}$, $\overline{DP}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 10=5$, $\angle EPD=90^\circ$

따라서 $\triangle EPD$에서 $\overline{EP}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$이므로

$\overline{EF}=2\overline{EP}=2\times\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$

15 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6$

이므로 $\triangle CAH$에서

$\overline{CH}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

$\overline{BP}=x$라 하면 $\overline{HP}=6-x$

$\triangle CHP$에서 $\overline{CP}^2=(6\sqrt{3})^2+(6-x)^2=x^2-12x+144$

$\therefore\ \overline{BP}^2+\overline{CP}^2=x^2+x^2-12x+144$

$=2x^2-12x+144$

$=2(x-3)^2+126$

따라서 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 126이다.

16 $\triangle ABP$와 $\triangle ADQ$에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{AP}=\overline{AQ}$, $\angle B=\angle D=90^\circ$이므로

$\triangle ABP\equiv\triangle ADQ$ (RHS 합동)

즉, $\overline{BP}=\overline{DQ}$이고 $\overline{PC}=\overline{QC}$이므로

$\overline{PC}=x$ cm라 하면 $\overline{BP}=(5-x)$ cm

$\triangle ABP$에서 $\overline{AP}^2=5^2+(5-x)^2$

$\triangle QPC$에서 $\overline{PQ}^2=x^2+x^2$

이때 $\triangle APQ$는 정삼각형이므로 $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$에서

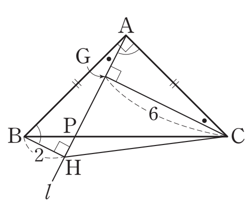
$5^2+(5-x)^2=2x^2$, $x^2+10x-50=0$

$\therefore\ x=-5+5\sqrt{3}$ ($\because\ 0<x<5$)

$\therefore\ \triangle PCQ=\frac{1}{2}\times(-5+5\sqrt{3})^2=\frac{1}{2}\times(100-50\sqrt{3})$

$=50-25\sqrt{3}$ (cm^2)

17 오른쪽 그림의 $\triangle ABH$와 $\triangle CAG$에서 $\overline{AB}=\overline{CA}$,



$\angle BHA=\angle AGC=90^\circ$,

$\angle ABH=90^\circ-\angle BAH$

$=\angle CAG$

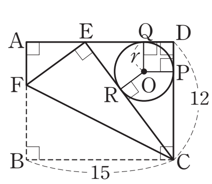
이므로 $\triangle ABH\equiv\triangle CAG$ (RHA 합동)

따라서 $\overline{AH}=\overline{CG}=6$, $\overline{AG}=\overline{BH}=2$이고,

$\overline{GH}=\overline{AH}-\overline{AG}=6-2=4$이므로

$\triangle CGH$에서 $\overline{CH}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

18 오른쪽 그림과 같이 $\triangle CDE$와 원 O의 세 접점을 각각 P, Q, R라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=r$

이때 $\overline{CE}=\overline{BC}=15$이므로

$\triangle CDE$에서 $\overline{DE}=\sqrt{15^2-12^2}=9$

$\therefore\ \triangle CDE=\frac{1}{2}\times 9\times 12=54$

따라서 $\triangle CDE=\triangle CDO+\triangle DEO+\triangle ECO$이므로

$\frac{1}{2}\times r\times(\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EC})=54$, $\frac{1}{2}\times r\times(12+9+15)=54$

$18r=54 \qquad \therefore\ r=3$

19 ㄱ. $\triangle ADC$에서 $\angle C=90^\circ$이므로 $x^2+y^2=b^2$

ㄴ. $\triangle ABD$에서 $\angle BAD<90^\circ$이므로 $a^2<b^2+c^2$

ㄷ. $\triangle ABD$에서 $\angle ADB>90^\circ$이므로 $c^2>a^2+b^2$

그런데 $b^2=x^2+y^2$이므로 $c^2>a^2+x^2+y^2$

ㄹ. $\triangle ABD$에서 $\angle B<90^\circ$이므로 $b^2<a^2+c^2$

그런데 $b^2=x^2+y^2$이므로 $x^2+y^2<a^2+c^2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

20 ㄱ. $(\sqrt{6}a)^2>(\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{3}a)^2$이므로 직각삼각형이 아니다.

ㄴ. $(25a)^2=(7a)^2+(24a)^2$이므로 직각삼각형이다.

ㄷ. $(a+6)^2=a^2+12a+36$

$(a+4)^2+(a+5)^2=2a^2+18a+41$

즉, 자연수 a에 대하여 $(a+6)^2<(a+4)^2+(a+5)^2$이므로 직각삼각형이 아니다.

ㄹ. $a>b$인 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b>a-b$ $\cdots$ ㉠

$a+b>0$, $2\sqrt{ab}>0$이고,

$(a+b)^2-(2\sqrt{ab})^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2>0$이므로

$a+b>2\sqrt{ab}$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a+b$가 가장 긴 변의 길이이고,

$(a+b)^2=(a-b)^2+(2\sqrt{ab})^2$이므로 직각삼각형이다.

따라서 직각삼각형인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

참고 두 실수 a, b에 대하여 $a>0$, $b>0$일 때,

① $a^2-b^2>0$이면 $a>b$

② $a^2-b^2=0$이면 $a=b$

③ $a^2-b^2<0$이면 $a<b$

21 주어진 5개의 선분 중에서 3개를 골라 삼각형을 만들 수 있는 경우를 순서쌍으로 각각 나타내면

(i) 가장 긴 변의 길이가 11 cm인 경우

(11 cm, 4 cm, 8 cm), (11 cm, 4 cm, 9 cm),

(11 cm, 6 cm, 8 cm), (11 cm, 6 cm, 9 cm),

(11 cm, 8 cm, 9 cm)

(ii) 가장 긴 변의 길이가 9 cm인 경우

(9 cm, 4 cm, 6 cm), (9 cm, 4 cm, 8 cm),

(9 cm, 6 cm, 8 cm)

(iii) 가장 긴 변의 길이가 8 cm인 경우

(8 cm, 4 cm, 6 cm)

따라서 (i)~(iii)에서 모두 9가지이고

$11^2>4^2+8^2$ ⇨ 둔각삼각형, $11^2>4^2+9^2$ ⇨ 둔각삼각형,

$11^2>6^2+8^2$ ⇨ 둔각삼각형, $11^2>6^2+9^2$ ⇨ 둔각삼각형,

$11^2<8^2+9^2$ ⇨ 예각삼각형, $9^2>4^2+6^2$ ⇨ 둔각삼각형,

$9^2>4^2+8^2$ ⇨ 둔각삼각형, $9^2<6^2+8^2$ ⇨ 예각삼각형,

$8^2>4^2+6^2$ ⇨ 둔각삼각형

에서 둔각삼각형이 되는 경우는 7가지이므로 구하는 확률은 $\frac{7}{9}$이다.

22 $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

점 M은 직각삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로

$6\times 8=10\times\overline{AH}\qquad \therefore \overline{AH}=\frac{24}{5}$

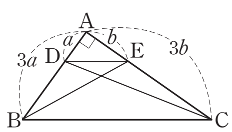
$\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$이므로 $6^2=\overline{BH}\times 10\qquad \therefore \overline{BH}=\frac{18}{5}$

$\therefore \overline{HM}=\overline{BM}-\overline{BH}=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}$

따라서 $\triangle AHM$에서 $\overline{AH}\times\overline{HM}=\overline{AM}\times\overline{HI}$이므로

$\frac{24}{5}\times\frac{7}{5}=5\times\overline{HI}\qquad \therefore \overline{HI}=\frac{168}{125}$

23 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}=a$, $\overline{AE}=b$라 하면



$\overline{AD}:\overline{AB}=1:3$,

$\overline{AE}:\overline{AC}=1:3$이므로

$\overline{AB}=3a$, $\overline{AC}=3b$

이때 $\overline{BE}^2+\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$이므로

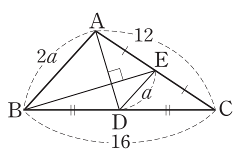
$80=(a^2+b^2)+\{(3a)^2+(3b)^2\}$

$10(a^2+b^2)=80\qquad \therefore a^2+b^2=8$

따라서 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{(3a)^2+(3b)^2}=\sqrt{9(a^2+b^2)}=\sqrt{9\times 8}=6\sqrt{2}$

24 오른쪽 그림과 같이 $\overline{DE}$를 긋고 $\overline{DE}=a$라 하면 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해



$\overline{AB}=2\overline{DE}=2a$

□ABDE에서 $\overline{AD}\perp\overline{BE}$이므로

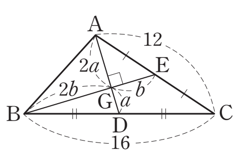
$\overline{AB}^2+\overline{DE}^2=\overline{BD}^2+\overline{AE}^2$

$(2a)^2+a^2=8^2+6^2$, $5a^2=100$

$a^2=20\qquad \therefore a=2\sqrt{5}\,(\because a>0)$

$\therefore \overline{AB}=2a=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

다른 풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$의 교점을 G라 하면 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 $\overline{AG}=2a$,



$\overline{GD}=a$, $\overline{BG}=2b$, $\overline{GE}=b$라 하면

$\triangle AGE$에서

$(2a)^2+b^2=6^2$, $4a^2+b^2=36\qquad \cdots ㉠$

$\triangle BDG$에서

$(2b)^2+a^2=8^2$, $a^2+4b^2=64\qquad \cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$5(a^2+b^2)=100\qquad \therefore a^2+b^2=20$

따라서 $\triangle ABG$에서

$\overline{AB}=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=\sqrt{4(a^2+b^2)}=\sqrt{4\times 20}=4\sqrt{5}$

25 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$이므로 $\overline{AP}^2+6^2=4^2+5^2$, $\overline{AP}^2=5$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{5}\,(\because \overline{AP}>0)$

$\triangle ABP$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이므로 $\angle APB=90°$이다.

$\therefore \triangle ABP=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{AP}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

26 $\overline{AD}=\overline{BC}=6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$이므로 $\triangle ABD$에서

$\overline{BD}=\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}=12\,(\mathrm{cm})$

$\triangle ABD$와 $\triangle EBA$에서

$\angle BAD=\angle BEA=90°$,

$\angle BAE=90°-\angle DAE=\angle ADE$이므로

$\triangle ABD\backsim\triangle EBA$ (AA 닮음)

이때 $\overline{BD}:\overline{BA}=12:6=2:1$이므로

$\overline{AB}:\overline{EB}=2:1$에서 $6:\overline{EB}=2:1$

$\therefore \overline{EB}=3\,(\mathrm{cm})$

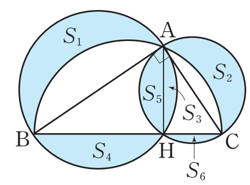
$\triangle ABE$에서 $\overline{AE}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

따라서 $\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=\overline{BE}^2+\overline{DE}^2$이므로

$(3\sqrt{3})^2+\overline{CE}^2=3^2+(12-3)^2$, $\overline{CE}^2=63$

$\therefore \overline{CE}=3\sqrt{7}\,(\mathrm{cm})\,(\because \overline{CE}>0)$

27 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AH}$를 긋고, 색칠한 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6라 하면



(색칠한 부분의 넓이)

$=(S_1+S_2)+(S_3+S_4)+(S_5+S_6)$

$=\triangle ABC+\{$(지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이)$-\triangle ABH\}$

$+\{$(지름이 $\overline{AC}$인 반원의 넓이)$-\triangle AHC\}$

$=\{\triangle ABC-(\triangle ABH+\triangle AHC)\}$

$+\{$(지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이)$+$(지름이 $\overline{AC}$인 반원의 넓이)$\}$

$=$(지름이 $\overline{BC}$인 반원의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\times 12\right)^2=18\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

28 $\overline{AE}=x\,\mathrm{cm}$라 하면 $\overline{BE}=(10-x)\,\mathrm{cm}$

이때 $\overline{AE}=\overline{PE}$, $\overline{BE}=\overline{QE}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{EQ}-\overline{EP}=(10-x)-x=10-2x\,(\mathrm{cm})$

마찬가지로 $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}$이므로

□PQRS는 한 변의 길이가 $\sqrt{16}=4\,(\mathrm{cm})$인 정사각형이다.

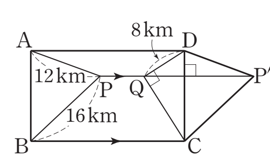
즉, $10-2x=4\qquad \therefore x=3$

$\overline{BF}=\overline{AE}=3\,\mathrm{cm}$, $\overline{BE}=10-3=7\,(\mathrm{cm})$

따라서 $\triangle BEF$에서 $\overline{EF}=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}\,(\mathrm{cm})$이고 □EFGH는 정사각형이므로

(□EFGH의 넓이)$=(\sqrt{58})^2=58\,(\mathrm{cm}^2)$

29 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABP$를 $\overline{AB}$와 $\overline{DC}$가 일치하도록 이동시키면 □DQCP′에서 $\overline{DC}\perp\overline{QP'}$이므로



$\overline{DQ}^2+\overline{CP'}^2=\overline{DP'}^2+\overline{CQ}^2$, $8^2+16^2=12^2+\overline{CQ}^2$

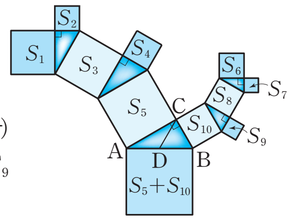
$\therefore \overline{CQ}=4\sqrt{11}\,(\mathrm{km})\,(\because \overline{CQ}>0)$

이때 $\triangle DQC$는 $\angle DQC=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{CD}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{11})^2}=4\sqrt{15}\,(\mathrm{km})$

따라서 두 매장 C, D 사이의 거리는 $4\sqrt{15}\,\mathrm{km}$이다.

30 오른쪽 그림과 같이 각 꽃밭의 넓이를 S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_{10}이라 하면



(채송화가 심어진 부분의 넓이의 합)

$=(S_1+S_2)+S_4+(S_6+S_7)+S_9$

$=(S_3+S_4)+(S_8+S_9)$

$=S_5+S_{10}$

이때 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 S_5+S_{10}이므로

$S_5+S_{10}=324\,(\mathrm{m}^2)$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{324}=18\,(\mathrm{m})\ (\because\ \overline{AB}>0)$

이때 점 D는 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로 외심이다.

$\therefore$ (다리의 길이)$=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times18=9\,(\mathrm{m})$

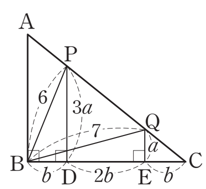
STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 32~33

01 $\sqrt{34}$ **02** 258 **03** 3 cm **04** 17 cm **05** $3\sqrt{5}$

06 빗변의 길이가 a인 직각삼각형 **07** 10개 **08** $\frac{2}{3}$ cm

01 길잡이 두 점 P, Q에서 $\overline{BC}$에 수선을 그어 $\overline{BP}$, $\overline{BQ}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 각각 만들어 본다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면



$\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QC}=1:2:1$이므로

$\overline{QE}:\overline{PD}=1:3$,

$\overline{BD}:\overline{DE}:\overline{EC}=1:2:1$

이때 $\overline{QE}=a$, $\overline{PD}=3a\,(a>0)$,

$\overline{BD}=b$, $\overline{DE}=2b$, $\overline{EC}=b\,(b>0)$라 하면

$\triangle$BDP에서 $\overline{BP}^2=b^2+(3a)^2=6^2$

$\therefore\ 9a^2+b^2=36 \qquad \cdots$ ㉠

$\triangle$BEQ에서 $\overline{BQ}^2=(3b)^2+a^2=7^2$

$\therefore\ a^2+9b^2=49 \qquad \cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $10(a^2+b^2)=85 \qquad \therefore\ a^2+b^2=\frac{17}{2}$

따라서 $\triangle$QEC에서 $\overline{QC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}=\frac{\sqrt{34}}{2}$이고

$\overline{PQ}:\overline{QC}=2:1$이므로

$\overline{PQ}=2\overline{QC}=2\times\frac{\sqrt{34}}{2}=\sqrt{34}$

02 길잡이 점 E, F에서 각각 $\overline{DB}$, $\overline{GC}$의 연장선에 수선을 그어 직각삼각형을 만든 후 $\triangle$DEB와 $\triangle$CFG의 높이와 넓이를 각각 구한다.

$\square$DBAI$=8^2=64$, $\square$ACGH$=5^2=25$

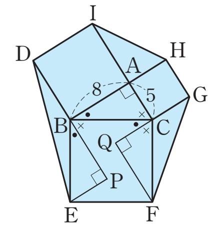
$\square$BEFC$=\square$DBAI$+\square$ACGH$=64+25=89$

$\overline{AB}=\overline{AI}=8$, $\overline{AC}=\overline{AH}=5$, $\angle$BAC$=\angle$IAH$=90^\circ$이므로

$\triangle$ABC$\equiv\triangle$AIH (SAS 합동)

$\triangle$ABC$=\triangle$AHI$=\frac{1}{2}\times8\times5=20$

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{DB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 P, 점 F에서 $\overline{GC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 Q라 하면



$\triangle$PBE와 $\triangle$ABC에서

$\overline{BE}=\overline{BC}$, $\angle$BPE$=\angle$BAC$=90^\circ$,

$\angle$PBE$=90^\circ-\angle$PBC$=\angle$ABC이므로

$\triangle$PBE$\equiv\triangle$ABC (RHA 합동)

$\therefore\ \overline{PE}=\overline{AC}=5$

$\therefore\ \triangle$DEB$=\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{PE}=\frac{1}{2}\times8\times5=20$

같은 방법으로 $\triangle$QFC$\equiv\triangle$ABC (RHA 합동)이므로

$\overline{QF}=\overline{AB}=8$

$\therefore\ \triangle$CFG$=\frac{1}{2}\times\overline{CG}\times\overline{QF}=\frac{1}{2}\times5\times8=20$

$\therefore$ (육각형 DEFGHI의 넓이)

$=\square$DBAI$+\square$ACGH$+\square$BEFC

$\quad+\triangle$ABC$+\triangle$AHI$+\triangle$DEB$+\triangle$CFG

$=64+25+89+4\times20=258$

03 길잡이 $\triangle$AEP$\backsim\triangle$DPQ (AA 닮음)임을 이용한다.

$\overline{AE}:\overline{AP}=4:3$이므로

$\overline{AE}=4a$ cm, $\overline{AP}=3a$ cm $(a>0)$라 하면

$\triangle$AEP에서 $\overline{EP}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$ (cm)

$\therefore\ \overline{EB}=\overline{EP}=5a$ cm

이때 $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}=18$ cm이므로

$4a+5a=18$, $9a=18 \qquad \therefore\ a=2$

즉, $\overline{AE}=4\times2=8$ (cm), $\overline{AP}=3\times2=6$ (cm),

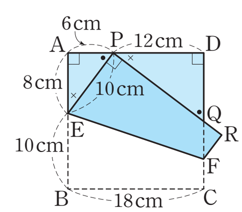
$\overline{EB}=\overline{EP}=5\times2=10$ (cm)

또 $\triangle$AEP와 $\triangle$DPQ에서

$\angle$A$=\angle$D$=90^\circ$, $\angle$AEP$=90^\circ-\angle$APE$=\angle$DPQ이므로

$\triangle$AEP$\backsim\triangle$DPQ (AA 닮음)

따라서 오른쪽 그림에서



$\overline{AE}:\overline{DP}=\overline{EP}:\overline{PQ}$이므로

$8:12=10:\overline{PQ}$

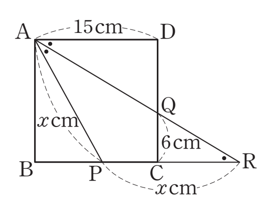
$8\overline{PQ}=120 \qquad \therefore\ \overline{PQ}=15$ (cm)

이때 $\overline{PR}=\overline{BC}=18$ cm이므로

$\overline{QR}=\overline{PR}-\overline{PQ}=18-15=3$ (cm)

04 길잡이 $\overline{AQ}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 연장선의 교점을 R라 하면 $\triangle$PRA는 이등변삼각형임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AQ}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 연장선의 교점을 R라 하면



$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle$DAQ$=\angle$CRQ (엇각)

$\therefore\ \angle$PAR$=\angle$PRA

즉, $\triangle$PRA는 이등변삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{RP}=x$ cm라 하면

$\triangle$AQD$\backsim\triangle$RQC (AA 닮음)이므로

$\overline{AD}:\overline{RC}=\overline{DQ}:\overline{CQ}$에서

$15:\overline{RC}=(15-6):6 \qquad \therefore\ \overline{RC}=10$ (cm)

$\therefore\ \overline{BR}=15+10=25$ (cm), $\overline{BP}=\overline{BR}-\overline{PR}=25-x$ (cm)

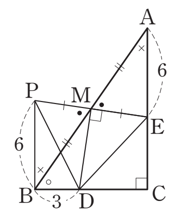
따라서 $\triangle ABP$에서

$x^2=15^2+(25-x)^2$, $50x=850$

$\therefore \overline{AP}=x=17\,(cm)$

05 **길잡이** $\overline{EM}$의 연장선을 긋고 $\overline{ME}=\overline{MP}$인 점 P를 잡아 $\overline{BP}$, $\overline{DP}$를 그은 다음 $\triangle DEM$, $\triangle AME$와 합동인 삼각형을 각각 찾아 본다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{EM}$의 연장선 위에 $\overline{ME}=\overline{MP}$가 되도록 점 P를 잡고 $\overline{BP}$, $\overline{DP}$를 그으면



$\triangle DEM \equiv \triangle DPM$ (SAS 합동)

$\triangle AME$와 $\triangle BMP$에서

$\overline{ME}=\overline{MP}$, $\angle AME=\angle BMP$ (맞꼭지각), $\overline{AM}=\overline{BM}$이므로

$\triangle AME \equiv \triangle BMP$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{BP}=\overline{AE}=6$, $\angle PBM=\angle EAM$

이때

$\angle PBD=\angle PBM+\angle MBD=\angle EAM+\angle MBD$

$\quad=\angle CAB+\angle ABC=180^\circ-\angle C$

$\quad=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

이므로 $\triangle PBD$에서 $\overline{DP}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

따라서 $\triangle DEM\equiv\triangle DPM$이므로 $\overline{DE}=\overline{DP}=3\sqrt{5}$이다.

06 **길잡이** 주어진 식의 양변을 전개하여 인수분해하여 본다.

주어진 식의 양변을 전개하여 인수분해하면

$b^2c^2+a^2b^2-b^4=a^2c^2+b^2c^2-c^4$

$a^2b^2-b^4-a^2c^2+c^4=0$, $a^2(b^2-c^2)-(b^4-c^4)=0$

$a^2(b^2-c^2)-(b^2+c^2)(b^2-c^2)=0$

$(b^2-c^2)\{a^2-(b^2+c^2)\}=0$

$\therefore b^2-c^2=0$ 또는 $a^2-b^2-c^2=0$

$\therefore b=c$ 또는 $a^2=b^2+c^2$

그런데 $a>0$, $b>0$, $c>0$이고 $b\neq c$이므로 $a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 식을 만족하는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

07 **길잡이** 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계와 둔각삼각형이 되는 조건을 이용하여 주어진 식을 만족하는 경우를 찾는다.

삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계에서

$a+b>10 \qquad \cdots ㉠$

또 이 삼각형이 둔각삼각형이므로

$a^2+b^2<10^2=100 \qquad \cdots ㉡$

(i) $b\leq5$이면 $a+b<2b\leq10$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $b=6$이면 $a<6$이므로 ㉠을 만족하는 a의 값은 $a=5$

a, b의 값이 ㉡을 만족하므로 (a, b, c)는 $(5, 6, 10)$

(iii) $b=7$이면 $a<7$이므로 ㉠을 만족하는 a의 값은 $a=4, 5, 6$

a, b의 값이 ㉡을 모두 만족하므로

(a, b, c)는 $(4, 7, 10)$, $(5, 7, 10)$, $(6, 7, 10)$

(iv) $b=8$이면 $a<8$이므로 ㉠을 만족하는 a의 값은

$a=3, 4, 5, 6, 7$

a, b의 값이 ㉡을 만족하는 (a, b, c)는

$(3, 8, 10)$, $(4, 8, 10)$, $(5, 8, 10)$

(v) $b=9$이면 $a<9$이므로 ㉠을 만족하는 a의 값은

$a=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

a, b의 값이 ㉡을 만족하는 (a, b, c)는

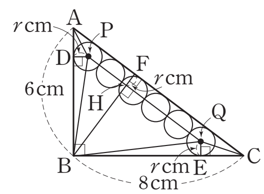
$(2, 9, 10)$, $(3, 9, 10)$, $(4, 9, 10)$

따라서 (i)~(v)에서 구하는 삼각형의 개수는

$1+3+3+3=10$(개)이다.

08 **길잡이** 합동인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하고 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 F라 할 때, $\triangle ABC$의 넓이에서 $\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BF}$임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 양 끝의 두 원의 중심을 각각 P, Q, 세 점 P, Q, B에서 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 차례로 D, E, F라 하고 $\overline{PQ}$와 $\overline{BF}$의 교점을 H, 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\overline{PD}=\overline{QE}=\overline{HF}=r$ cm, $\overline{PQ}=10r$ cm

$\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,(cm)$이고

$\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BF}$이므로

$6\times8=10\times\overline{BF} \qquad \therefore \overline{BF}=\frac{24}{5}\,(cm)$

$\triangle ABC=\square APQC+\triangle PAB+\triangle QBC+\triangle PBQ$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times6=\frac{1}{2}\times(10+10r)\times r+\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times8\times r$

$\quad+\frac{1}{2}\times10r\times\left(\frac{24}{5}-r\right)$

$24=(5r+5r^2)+3r+4r+(24r-5r^2)$

$36r=24 \qquad \therefore r=\frac{2}{3}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{2}{3}$ cm이다.

2 피타고라스 정리의 활용

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 34~37

1 $14\sqrt{2}$ **2** $18\pi\ cm^2$ **3** $9\sqrt{3}\ cm^2$ **4** $72\sqrt{3}\ cm^2$
5 $3\sqrt{55}\ cm^2$ **6** $22\ cm^2$ **7** $x=4\sqrt{3}$, $y=3\sqrt{2}$
8 $4\sqrt{3}$ cm **9** $(24+8\sqrt{3})\ cm^2$ **10** 10
11 직각이등변삼각형 **12** $2\sqrt{41}$ cm **13** $4\sqrt{5}$
14 $6\sqrt{3}$ cm **15** $24\sqrt{3}\ cm^3$ **16** $4\sqrt{2}$ cm **17** ③
18 $112\ cm^3$ **19** $36\sqrt{5}\pi$ **20** $24\pi\ cm^2$ **21** $55\pi\ cm^2$
22 $8\sqrt{2}$ cm

1 $\overline{AB}=3a$, $\overline{BC}=4a\,(a>0)$라 하면

$\overline{BD}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5\sqrt{2}$, $5a=5\sqrt{2} \qquad \therefore a=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}=3a=3\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4a=4\sqrt{2}$이므로

(직사각형의 둘레의 길이)$=2\times(3\sqrt{2}+4\sqrt{2})=14\sqrt{2}$

2 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$\sqrt{2}x=12 \qquad \therefore x=6\sqrt{2}$

따라서 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}\,(cm)$

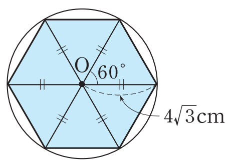
이므로 (원의 넓이)$=\pi\times(3\sqrt{2})^2=18\pi\,(\text{cm}^2)$

3 $\triangle$ABC에서 $\overline{\text{AD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\text{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times8=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\triangle$ADE에서 $\overline{\text{AF}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{\text{AD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=6\,(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle\text{AFG}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

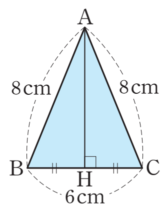
4 오른쪽 그림과 같이 정육각형은 정삼각형 6개로 이루어져 있고 원 O의 지름의 길이가 $8\sqrt{3}$ cm이므로 정삼각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$



이다.

$\therefore$ (정육각형의 넓이)$=6\times\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\right\}=72\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

5 오른쪽 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 8 cm, 8 cm, 6 cm인 $\triangle$ABC의 점 A에서 $\overline{\text{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



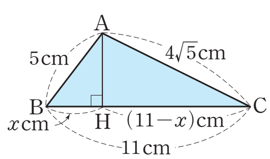
$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{CH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\text{BC}}=\dfrac{1}{2}\times6=3\,(\text{cm})$

$\triangle$ABH에서

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{2}\times6\times\sqrt{55}=3\sqrt{55}\,(\text{cm}^2)$

6 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC의 점 A에서 $\overline{\text{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\text{BH}}=x$ cm라 하면



$\overline{\text{CH}}=(11-x)$ cm

$\triangle$ABH에서 $\overline{\text{AH}}^2=5^2-x^2$

$\triangle$AHC에서 $\overline{\text{AH}}^2=(4\sqrt{5})^2-(11-x)^2$

즉, $5^2-x^2=(4\sqrt{5})^2-(11-x)^2$, $22x=66$

$\therefore\ x=3$

$\overline{\text{AH}}^2=5^2-3^2=16\qquad\therefore\ \overline{\text{AH}}=4\,(\text{cm})\,(\because\ \overline{\text{AH}}>0)$

$\therefore\ \triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{2}\times11\times4=22\,(\text{cm}^2)$

7 $\triangle$ACD에서 $x:2\sqrt{3}=2:1$이므로

$x=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

또 $\overline{\text{AC}}:2\sqrt{3}=\sqrt{3}:1$이므로

$\overline{\text{AC}}=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$

$\triangle$ABC에서 $y:\overline{\text{AC}}=1:\sqrt{2}$이므로

$y:6=1:\sqrt{2}$, $\sqrt{2}y=6$

$\therefore\ y=3\sqrt{2}$

8 $\triangle$ABC에서 $\angle\text{BAC}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$이므로

$12:\overline{\text{AC}}=2:1\qquad\therefore\ \overline{\text{AC}}=6\,(\text{cm})$

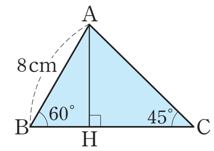
$\overline{\text{AD}}$는 $\angle$A의 이등분선이므로

$\angle\text{BAD}=\angle\text{DAC}=60^\circ\times\dfrac{1}{2}=30^\circ$

따라서 $\triangle$ADC에서 $\angle\text{ADC}=60^\circ$이므로

$\overline{\text{AD}}:6=2:\sqrt{3}\qquad\therefore\ \overline{\text{AD}}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

9 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABC의 점 A에서 $\overline{\text{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle$ABH에서 $8:\overline{\text{AH}}=2:\sqrt{3}$이므로

$2\overline{\text{AH}}=8\sqrt{3}\qquad\therefore\ \overline{\text{AH}}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$8:\overline{\text{BH}}=2:1$이므로

$2\overline{\text{BH}}=8\qquad\therefore\ \overline{\text{BH}}=4\,(\text{cm})$

$\triangle$AHC에서 $\overline{\text{AH}}:\overline{\text{HC}}=1:1$이므로

$\overline{\text{HC}}=\overline{\text{AH}}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{\text{BC}}=\overline{\text{BH}}+\overline{\text{HC}}=4+4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle\text{ABC}=\dfrac{1}{2}\times(4+4\sqrt{3})\times4\sqrt{3}=24+8\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

10 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{(a-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{5}$이므로

$(a-2)^2+16=80$, $(a-2)^2=64$

$a-2=\pm8\qquad\therefore\ a=-6$ 또는 $a=10$

그런데 점 B는 제4사분면 위의 점이므로 $a=10$이다.

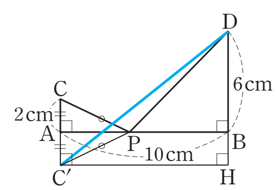
11 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{52}$

$\overline{\text{BC}}=\sqrt{(5-3)^2+(-6-4)^2}=\sqrt{104}$

$\overline{\text{CA}}=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+\{-6-(-2)\}^2}=\sqrt{52}$

따라서 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{CA}}$이고 $\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{CA}}^2=\overline{\text{BC}}^2$이므로 $\triangle$ABC는 $\angle\text{A}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

12 오른쪽 그림과 같이 점 C와 $\overline{\text{AB}}$에 대하여 대칭인 점을 C′이라 하면



$\overline{\text{CP}}=\overline{\text{C'P}}$이므로

$\overline{\text{CP}}+\overline{\text{DP}}=\overline{\text{C'P}}+\overline{\text{DP}}\geq\overline{\text{C'D}}$

점 C′에서 $\overline{\text{DB}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{BH}}=\overline{\text{AC'}}=\overline{\text{AC}}=2$ cm이므로 $\overline{\text{DH}}=6+2=8\,(\text{cm})$

$\triangle$DC′H에서 $\overline{\text{C'D}}=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}\,(\text{cm})$

따라서 $\overline{\text{CP}}+\overline{\text{DP}}$의 최솟값은 $2\sqrt{41}$ cm이다.

13 $\sqrt{\overline{\text{FG}}^2+8^2+5^2}=13$이므로

$\overline{\text{FG}}^2+89=169$, $\overline{\text{FG}}^2=80$

$\therefore\ \overline{\text{FG}}=4\sqrt{5}\,(\because\ \overline{\text{FG}}>0)$

14 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm, 대각선의 길이를 l cm라 하면

$\triangle$BCD에서 $\overline{\text{BD}}=\sqrt{2}a$ cm이므로

$\triangle\text{BGD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2\,(\text{cm}^2)$

즉, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2=18\sqrt{3}$에서 $a^2=36\qquad\therefore\ a=6\,(\because\ a>0)$

$\therefore\ l=\sqrt{3}a=6\sqrt{3}$

15 구에 내접하는 정육면체의 대각선의 길이는 구의 지름의 길이와 같으므로 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$\sqrt{3}a=2\times3\qquad\therefore\ a=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (정육면체의 부피)$=(2\sqrt{3})^3=24\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$

16 정사면체의 한 모서리의 길이를 a cm라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=12\sqrt{3}$에서 $a^2=48$ $\quad\therefore a=4\sqrt{3}\ (\because a>0)$

$\therefore$ (정사면체의 높이)$=\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{3}\times4\sqrt{3}=4\sqrt{2}$ (cm)

17 ① $\overline{CM}$은 한 변의 길이가 $3\sqrt{6}$ cm인 정삼각형의 높이이므로

$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{6}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (cm)

② 점 H는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로

$\overline{CH}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{2}{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ (cm)

③ $\triangle OHC$에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2}=6$ (cm)

④ $\triangle ABC$는 한 변의 길이가 $3\sqrt{6}$ cm인 정삼각형이므로

$\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{6})^2=\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (cm^2)

⑤ (정사면체의 부피)$=\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{OH}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{27\sqrt{3}}{2}\times6=27\sqrt{3}$ (cm^3)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

다른 풀이 정사면체의 한 모서리의 길이가 $3\sqrt{6}$ cm이므로

③ (정사면체의 높이)$=\overline{OH}=\frac{\sqrt{6}}{3}\times3\sqrt{6}=6$ (cm)

⑤ (정사면체의 부피)$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times(3\sqrt{6})^3=27\sqrt{3}$ (cm^3)

18 $\triangle OBH$에서 $\overline{BH}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$ (cm)

$\therefore \overline{BD}=2\overline{BH}=2\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$ (cm)

□ABCD에서 $\sqrt{2}\times\overline{AB}=4\sqrt{7}$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{14}$ (cm)

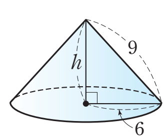
$\therefore$ (정사각뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times$□ABCD$\times\overline{OH}$

$=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{14})^2\times6=112$ (cm^3)

19 원뿔의 전개도에서 밑면인 원의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times9\times\frac{240}{360}=2\pi\times r$ $\quad\therefore r=6$

따라서 주어진 전개도로 만든 원뿔은 오른쪽 그림과 같으므로 원뿔의 높이를 h라 하면

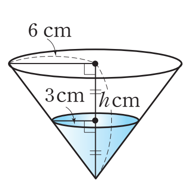


$h=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore$ (원뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times3\sqrt{5}$

$=36\sqrt{5}\pi$

20 오른쪽 그림과 같이 그릇의 높이를 h cm라 하면 부피가 96π cm^{3}이므로



$\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times h=96\pi,\ 12h=96$

$\therefore h=8$

이때 물이 채워진 원뿔은 밑면의 반지름의 길이가 3 cm, 높이가 4 cm이므로

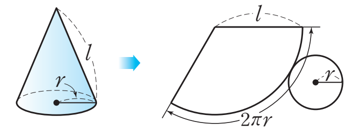
(물이 채워진 원뿔의 모선의 길이)$=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (cm)

$\therefore$ (물이 채워진 원뿔의 겉넓이)$=\pi\times3^2+\pi\times3\times5$

$=24\pi$ (cm^2)

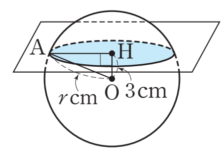
참고 원뿔의 겉넓이

다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 r, 모선의 길이가 l인 원뿔의 겉넓이 S는



$S=\pi r^2+\frac{1}{2}\times l\times2\pi r=\pi r^2+\pi rl$

21 오른쪽 그림과 같이 구의 반지름의 길이를 r cm라 하면



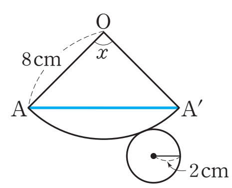
$4\pi r^2=256\pi$에서 $r^2=64$

$\therefore r=8(\because r>0)$

따라서 $\triangle AOH$에서 $\overline{AH}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$ (cm)이므로

(단면인 원의 넓이)$=\pi\times(\sqrt{55})^2=55\pi$ (cm^2)

22 오른쪽 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 $\angle x$라 하면



$2\pi\times8\times\frac{x}{360}=2\pi\times2$ $\quad\therefore \angle x=90°$

따라서 $\triangle OAA'$은 직각삼각형이고 구하는 최단 거리는 $\overline{AA'}$의 길이와 같으므로

$\overline{AA'}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$ (cm)

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 38~42

1 ⑤ **2** ③ **3** 12 **4** $4\sqrt{3}$ **5** $2\sqrt{13}$ cm
6 $3\sqrt{3}$ **7** $\frac{8\sqrt{21}}{5}$ **8** $\frac{150}{17}$ **9** $2\sqrt{10}$ **10** ②
11 $32-16\sqrt{2}$ **12** $12+7\sqrt{3}$ **13** 3
14 20 cm **15** $2\sqrt{74}$ cm **16** ① **17** $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
18 $\frac{12\sqrt{34}}{17}$ cm **19** $2\sqrt{6}$ cm **20** $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ cm
21 $12\sqrt{11}$ cm^2 **22** $(32\sqrt{5}+80\pi)$ cm^2 **23** $6\sqrt{3}$ cm
24 $\sqrt{85}$ **25** (1, 1) **26** $\frac{3\sqrt{6}}{2}-3$ **27** $60\sqrt{2}$ cm

1 $\overline{BD}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{14})^2}=9$

$\triangle ABD$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BG}\times\overline{BD}$이므로

$5^2=\overline{BG}\times9$ $\quad\therefore \overline{BG}=\frac{25}{9}$

$\triangle BCD$에서 $\overline{CD}^2=\overline{DH}\times\overline{DB}$이므로

$5^2=\overline{DH}\times9$ $\quad\therefore \overline{DH}=\frac{25}{9}$

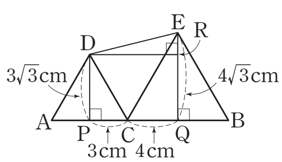
$\therefore \overline{GH}=9-2\times\frac{25}{9}=\frac{31}{9}$

2 □ABCD가 정사각형이고 $\overline{AC}=3\sqrt{2}$ cm이므로
$\sqrt{2}\times\overline{BC}=3\sqrt{2}$에서 $\overline{BC}=3$ (cm)
또 □CEFG가 정사각형이고 $\overline{CF}=6\sqrt{2}$ cm이므로
$\sqrt{2}\times\overline{CE}=6\sqrt{2}$에서 $\overline{CE}=6$ (cm)
따라서 △BEF에서
$\overline{BF}=\sqrt{(3+6)^2+6^2}=3\sqrt{13}$ (cm)

3 □POQR에서 $\overline{OQ}=a$, $\overline{OP}=b$라 하면
$\overline{AP}=7-b$, $\overline{QB}=7-a$이므로 □POQR$=ab=16$ ··· ㉠
이때 □POQR의 대각선 OR의 길이는 사분원의 반지름의 길이와 같으므로
$\overline{PQ}=\overline{OR}=\sqrt{a^2+b^2}=7$ ∴ $a^2+b^2=49$ ··· ㉡
㉠, ㉡에서 $(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab=49+2\times16=81$
∴ $a+b=9$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)
∴ $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{OR}+\overline{QB}$
$=(7-b)+7+(7-a)$
$=21-(a+b)$
$=21-9=12$

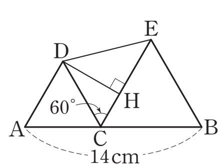
4 △ABC의 한 변의 길이를 a라 하면
△ABC=△PAB+△PBC+△PCA이므로
$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{2}\times a\times(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})$
∴ $a=4$
∴ △ABC$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

5 $\overline{AC}:\overline{CB}=3:4$이므로
$\overline{AC}=14\times\frac{3}{3+4}=6$ (cm), $\overline{CB}=14\times\frac{4}{3+4}=8$ (cm)
오른쪽 그림과 같이 두 점 D, E에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 D에서 $\overline{EQ}$에 내린 수선의 발을 R라 하면



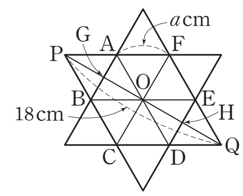
$\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6=3$ (cm), $\overline{CQ}=\frac{1}{2}\overline{CB}=\frac{1}{2}\times8=4$ (cm)
$\overline{DP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$ (cm), $\overline{EQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times8=4\sqrt{3}$ (cm)
따라서 △EDR에서
$\overline{DR}=\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CQ}=3+4=7$ (cm),
$\overline{ER}=\overline{EQ}-\overline{DP}=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (cm)이므로
$\overline{DE}=\sqrt{7^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$ (cm)

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{CE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



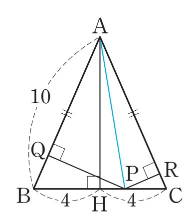
$\angle DCH=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$
$\overline{AC}:\overline{CB}=3:4$이므로
$\overline{AC}=14\times\frac{3}{3+4}=6$ (cm),
$\overline{CB}=14\times\frac{4}{3+4}=8$ (cm)
$\overline{DC}=\overline{AC}=6$ cm이고 $\angle DCH=60^\circ$이므로
$6:\overline{CH}=2:1$, $2\overline{CH}=6$
∴ $\overline{CH}=3$ (cm)
$6:\overline{DH}=2:\sqrt{3}$, $2\overline{DH}=6\sqrt{3}$
∴ $\overline{DH}=3\sqrt{3}$ (cm)
이때 $\overline{CE}=\overline{CB}=8$ cm이므로 $\overline{HE}=8-3=5$ (cm)
따라서 △DHE에서
$\overline{DE}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+5^2}=2\sqrt{13}$ (cm)

6 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$의 교점을 O라 하고, $\overline{PQ}$가 $\overline{AB}$, $\overline{DE}$와 만나는 점을 각각 G, H라 하자.



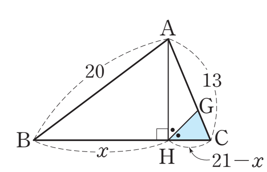
정육각형은 한 변의 길이가 a cm인 정삼각형 6개로 이루어져 있으므로
$\angle PAB=180^\circ-(\angle BAO+\angle OAF)$
$=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)$
$=60^\circ$
같은 방법으로 $\angle PBA=60^\circ$
즉, △PBA는 한 변의 길이가 a cm인 정삼각형이다.
이때 □PBOA에서 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{BO}=\overline{AO}$이므로 □PBOA는 마름모이고, 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로
$\overline{PG}=\overline{GO}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ cm ($\because$ $\overline{PG}$, $\overline{GO}$는 정삼각형의 높이)
같은 방법으로 $\overline{QH}=\overline{HO}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ cm
따라서 $\overline{PQ}=4\overline{PG}$이므로 $4\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=18$에서
$2\sqrt{3}a=18$ ∴ $a=3\sqrt{3}$

7 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times8=4$이므로
△ABH에서
$\overline{AH}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$
△ABC=△ABP+△APC이므로
$\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{21}=\frac{1}{2}\times10\times\overline{PQ}+\frac{1}{2}\times10\times\overline{PR}$
$5(\overline{PQ}+\overline{PR})=8\sqrt{21}$ ∴ $\overline{PQ}+\overline{PR}=\frac{8\sqrt{21}}{5}$

8 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BH}=x$라 하면 $\overline{CH}=21-x$



△ABH에서
$\overline{AH}^2=20^2-x^2$ ··· ㉠
△AHC에서
$\overline{AH}^2=13^2-(21-x)^2$ ··· ㉡
㉠, ㉡에서 $20^2-x^2=13^2-(21-x)^2$이므로
$42x=672$ ∴ $x=16$
∴ $\overline{CH}=21-16=5$, $\overline{AH}=\sqrt{20^2-16^2}=12$

$\overline{HG}$는 $\angle AHC$의 이등분선이므로

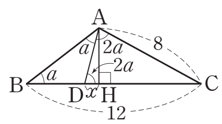
$\overline{CG}:\overline{AG}=\overline{CH}:\overline{AH}=5:12$

따라서 $\triangle GHC:\triangle AHG=\overline{CG}:\overline{AG}=5:12$이므로

$\triangle GHC=\dfrac{5}{5+12}\times\triangle AHC$

$=\dfrac{5}{17}\times\left(\dfrac{1}{2}\times5\times12\right)=\dfrac{150}{17}$

9 오른쪽 그림과 같이 $\angle ABD=\angle BAD$가 되도록 $\overline{BC}$ 위에 점 D를 잡고



$\angle ABD=\angle a$라 하면

$\angle BAC=3\angle ABC=3\angle a$이므로

$\angle CAD=2\angle a$

또 $\triangle ABD$에서 $\angle ADC=2\angle a$이므로

$\angle CAD=\angle ADC$

즉, $\triangle CAD$는 $\overline{DC}=\overline{AC}=8$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=12-8=4$

이때 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고

$\overline{DH}=x$라 하면 $\overline{AD}=\overline{BD}=4$이므로

$\triangle ADH$에서 $\overline{AH}^2=4^2-x^2$

$\triangle ACH$에서 $\overline{AH}^2=8^2-(8-x)^2$

즉, $16-x^2=64-(64-16x+x^2)$

$16x=16 \qquad \therefore x=1$

따라서 $\triangle ABH$에서

$\overline{AB}^2=(4+x)^2+4^2-x^2$

$=32+8x$

$=32+8\times1=40$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\,(\because \overline{AB}>0)$

10 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$이고

$\angle ADF=\angle BED=\angle CFE=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

$\therefore \angle FDE=180^\circ-(\angle ADF+\angle BDE)$

$=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)$

$=60^\circ$

같은 방법으로 $\angle DEF=\angle EFD=60^\circ$이므로 $\triangle DEF$는 정삼각형이다.

이때 세 직각삼각형 ADF, BED, CFE에서

$\overline{FD}=\overline{DE}=\overline{EF}$ ($\because \triangle DEF$가 정삼각형),

$\angle ADF=\angle BED=\angle CFE=30^\circ$,

$\angle AFD=\angle BDE=\angle CEF=90^\circ$이므로

$\triangle ADF\equiv\triangle BED\equiv\triangle CFE$ (ASA 합동)

$\triangle ADF$에서 $\overline{AF}=a$라 하면

$\overline{AD}:\overline{DF}:\overline{AF}=2:\sqrt{3}:1$이므로 $\overline{AD}=2a$, $\overline{DF}=\sqrt{3}a$

즉, $\overline{AF}=\overline{BD}=\overline{CE}=a$, $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=2a$이므로

$\triangle ABC$는 한 변의 길이가 $3a$인 정삼각형이고,

$\overline{FD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\sqrt{3}a$이므로

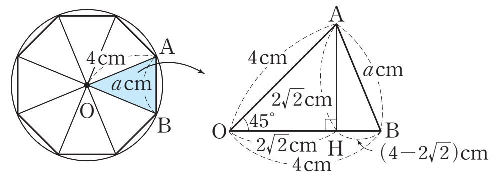
$\triangle DEF$는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}a$인 정삼각형이다.

따라서 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 닮음비가 $3a:\sqrt{3}a=3:\sqrt{3}$이므로

넓이의 비는

$\triangle ABC:\triangle DEF=3^2:(\sqrt{3})^2=9:3=3:1$

11



위의 그림과 같이 정팔각형은 8개의 합동인 이등변삼각형으로 이루어져 있으므로 이등변삼각형 AOB의 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle AOB=360^\circ\times\dfrac{1}{8}=45^\circ$

$\triangle AOH$에서

$\overline{AO}:\overline{OH}:\overline{AH}=\sqrt{2}:1:1$이므로

$\overline{OH}=\overline{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{AO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times4=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

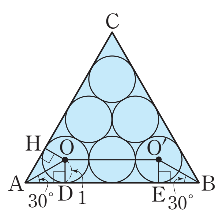
$\therefore \overline{HB}=\overline{OB}-\overline{OH}=4-2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle AHB$에서

$a^2=(2\sqrt{2})^2+(4-2\sqrt{2})^2$

$=32-16\sqrt{2}$

12 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심 O, O′에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 원의 중심 O에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{DE}=\overline{OO'}=4$

$\triangle OAD\equiv\triangle OAH$ (RHS 합동)이므로

$\angle OAD=\angle OAH=\dfrac{1}{2}\angle A$

$=\dfrac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$

이때 $\triangle OAD$에서

$\overline{AD}:\overline{OD}=\sqrt{3}:1$이므로 $\overline{AD}:1=\sqrt{3}:1$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{3}$

같은 방법으로 $\triangle O'EB$에서 $\overline{EB}=\sqrt{3}$이고

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB}=\sqrt{3}+4+\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$

$\therefore$ (정삼각형의 넓이)$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4+2\sqrt{3})^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(28+16\sqrt{3})$

$=12+7\sqrt{3}$

13 점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$b=a+1$

즉, $P(a,\ a+1)$

$\overline{PA}=\sqrt{(a-0)^2+(a+1+1)^2}$

$=\sqrt{2a^2+4a+4}$

$\overline{PB}=\sqrt{(a+2)^2+(a+1-3)^2}$

$=\sqrt{2a^2+8}$

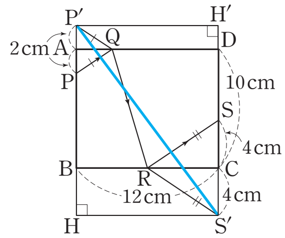
이때 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$2a^2+4a+4=2a^2+8$, $4a=4$

$\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore a+b=3$

14 오른쪽 그림과 같이 점 P와 $\overline{AD}$에 대하여 대칭인 점을 P′, 점 S와 $\overline{BC}$에 대하여 대칭인 점을 S′이라 하면



$\overline{PQ}=\overline{P'Q}$, $\overline{RS}=\overline{RS'}$이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}$

$=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RS'}\geq\overline{P'S'}$

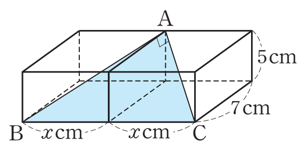
∴ (최단 거리)$=\overline{P'S'}$

$=\sqrt{\overline{P'H}^2+\overline{HS'}^2}$

$=\sqrt{(2+10+4)^2+12^2}$

$=20\,(\mathrm{cm})$

15 오른쪽 그림과 같이 처음 직육면체의 나머지 한 모서리의 길이를 $x$cm라 하면 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$는 모두 세 모서리의 길이가 각각 $x$cm, 7cm, 5cm인 직육면체의 대각선의 길이이므로



$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{x^2+7^2+5^2}=\sqrt{x^2+74}\,(\mathrm{cm})$

이때 $\triangle ABC$에서 $\angle BAC=90°$이므로

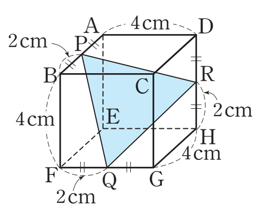
$(2x)^2=(x^2+74)+(x^2+74)$

$2x^2=148$, $x^2=74$

∴ $x=\sqrt{74}\,(\because x>0)$

∴ $\overline{BC}=2x=2\sqrt{74}\,(\mathrm{cm})$

16 오른쪽 그림에서 $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$는 모두 세 모서리의 길이가 각각 2cm, 2cm, 4cm인 직육면체의 대각선의 길이와 같으므로



$\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{PR}=\sqrt{2^2+2^2+4^2}$

$=2\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

따라서 $\triangle PQR$는 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$cm인 정삼각형이므로

$\triangle PQR=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{6})^2=6\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

17 점 Q가 정육면체의 대각선 CE 위에 있으므로 $\overline{BQ}=\overline{DQ}$

따라서 $\triangle BQD$는 이등변삼각형이므로 $\overline{BP}=\overline{DP}$이고 점 P는 $\overline{BD}$의 중점이다.

$\overline{CP}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{8^2+8^2}=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

∴ $\triangle PEC=\dfrac{1}{2}\times\overline{CP}\times\overline{AE}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times8=16\sqrt{2}$ … ㉠

또 $\overline{CE}=\sqrt{8^2+8^2+8^2}=8\sqrt{3}$이므로

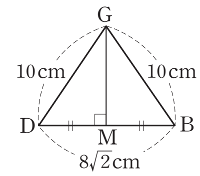
$\triangle PEC=\dfrac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{PQ}$

$=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times\overline{PQ}=4\sqrt{3}\times\overline{PQ}$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$4\sqrt{3}\times\overline{PQ}=16\sqrt{2}$ ∴ $\overline{PQ}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

18 오른쪽 그림과 같이 이등변삼각형 GDB의 점 G에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{BD}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$

$\overline{BG}=\overline{DG}=\sqrt{8^2+6^2}=10\,(\mathrm{cm})$이므로

$\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$

∴ $\overline{GM}=\sqrt{10^2-(4\sqrt{2})^2}=2\sqrt{17}\,(\mathrm{cm})$

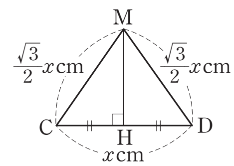
(삼각뿔 C−BGD의 부피)=(삼각뿔 G−BCD의 부피)이므로

$\dfrac{1}{3}\times\triangle BGD\times\overline{CP}=\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD\times\overline{CG}$

$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{2}\times2\sqrt{17}\right)\times\overline{CP}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times8\times8\right)\times6$

∴ $\overline{CP}=\dfrac{24}{\sqrt{34}}=\dfrac{12\sqrt{34}}{17}\,(\mathrm{cm})$

19 오른쪽 그림과 같이 $\triangle MCD$의 점 M에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 정사면체의 한 모서리의 길이를 $x$cm라 하면



$\overline{MC}=\overline{MD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\,\mathrm{cm}$

$\overline{CH}=\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{1}{2}x\,(\mathrm{cm})$

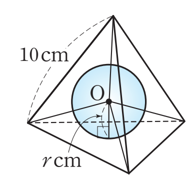
∴ $\overline{MH}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\,(\mathrm{cm})$

이때 $\triangle MCD=\dfrac{1}{2}\times x\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=9\sqrt{2}\,(\mathrm{cm}^2)$이므로

$x^2=36$ ∴ $x=6\,(\because x>0)$

∴ (정사면체의 높이)$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times6=2\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$

20 오른쪽 그림과 같이 정사면체에 내접하는 구의 중심을 O라 하고, 점 O에서 정사면체의 각 꼭짓점을 선분으로 이으면 처음 정사면체는 합동인 4개의 작은 삼각뿔로 나누어진다.



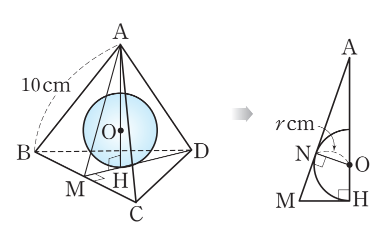
이때 삼각뿔의 높이는 구의 반지름의 길이와 같으므로 구의 반지름의 길이를 $r$cm라 하면

(큰 정사면체의 부피)=(4개의 작은 삼각뿔의 부피의 합)에서

$\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times10^3=4\times\left\{\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times10^2\right)\times r\right\}$

$10\sqrt{2}=4\sqrt{3}r$ ∴ $r=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

다른 풀이



위의 그림과 같이 정사면체의 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times10=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\,(\mathrm{cm})$

점 H는 △BCD의 무게중심이므로 $\overline{DH}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 M이라 하면

$\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{MD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times10\right)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (cm)

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times10=5\sqrt{3}$ (cm)

구의 중심 O에서 $\overline{AM}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면

△AON∽△AMH (AA 닮음)이므로

구의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\overline{ON}:\overline{MH}=\overline{AO}:\overline{AM}$에서

$r:\frac{5\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}-r\right):5\sqrt{3}$

$5\sqrt{3}r=\frac{50\sqrt{2}}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{3}r,\ \frac{20\sqrt{3}}{3}r=\frac{50\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ r=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

21 $\overline{NA}$, $\overline{MB}$는 각각 한 변의 길이가 8 cm인 정삼각형 ADO, BCO의 높이이므로

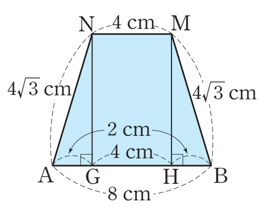
$\overline{NA}=\overline{MB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times8=4\sqrt{3}$ (cm)

△ODC에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{DC}=\frac{1}{2}\times8=4$ (cm)

이때 $\overline{NM}/\!/\overline{DC}/\!/\overline{AB}$이므로 □ABMN은 등변사다리꼴이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 N, M에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면



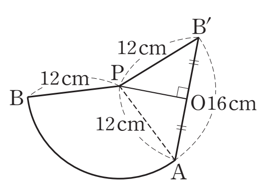
△NAG에서

$\overline{NG}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{11}$ (cm)

$\therefore$ □ABMN$=\frac{1}{2}\times(4+8)\times2\sqrt{11}$

$=12\sqrt{11}$ (cm^2)

22 밑면의 지름을 $\overline{AB}$라 하면 밑면에 수직인 평면으로 잘라서 생긴 입체도형의 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



(부채꼴 BPA의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\underbrace{\overset{\frown}{BA}}_{\text{밑면인 반원의 호의 길이}}$

$=\frac{1}{2}\times12\times\left(\frac{1}{2}\times2\pi\times8\right)$

$=48\pi$ (cm^2)

△POB'에서

$\overline{PO}=\sqrt{12^2-8^2}=4\sqrt{5}$ (cm)

$\therefore$ △PAB'$=\frac{1}{2}\times16\times4\sqrt{5}=32\sqrt{5}$ (cm^2)

$\therefore$ (구하는 입체도형의 겉넓이)

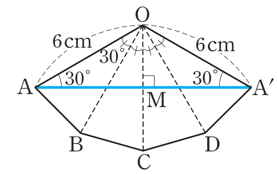
=(옆넓이)+(밑면인 반원의 넓이)

={△PAB'+(부채꼴 BPA의 넓이)}+(밑면인 반원의 넓이)

$=(32\sqrt{5}+48\pi)+\frac{1}{2}\times\pi\times8^2$

$=32\sqrt{5}+80\pi$ (cm^2)

23 정사각뿔의 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 최단 거리는 $\overline{AA'}$의 길이와 같다.



△OAA'은 $\overline{OA}=\overline{OA'}=6$ cm인 이등변삼각형이고,

∠AOA'$=30°\times4=120°$이므로

∠OAA'=∠OA'A

$=\frac{1}{2}\times(180°-120°)$

$=30°$

또 △OAM에서

∠AOM$=30°\times2=60°$이므로

∠AMO$=180°-(30°+60°)=90°$

따라서 △OAM에서

$\overline{AM}:\overline{AO}=\sqrt{3}:2$이므로 $\overline{AM}:6=\sqrt{3}:2$

$2\overline{AM}=6\sqrt{3}\qquad\therefore\ \overline{AM}=3\sqrt{3}$ (cm)

$\therefore\ \overline{AA'}=2\overline{AM}$

$=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (cm)

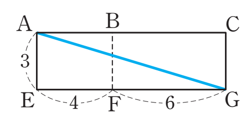
24 점 A에서 출발하여 점 G에 이르는 최단 거리를 다음과 같이 나누어 구해 보면

(i) 오른쪽 그림과 같이

$\overline{BF}$(또는 $\overline{DH}$)를 지나갈 때,

$\overline{AG}=\sqrt{(4+6)^2+3^2}$

$=\sqrt{109}$

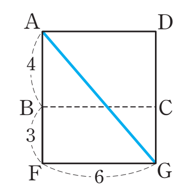


(ii) 오른쪽 그림과 같이

$\overline{BC}$(또는 $\overline{EH}$)를 지나갈 때,

$\overline{AG}=\sqrt{6^2+(4+3)^2}$

$=\sqrt{85}$

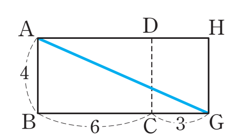


(iii) 오른쪽 그림과 같이

$\overline{CD}$(또는 $\overline{EF}$)를 지나갈 때,

$\overline{AG}=\sqrt{(6+3)^2+4^2}$

$=\sqrt{97}$



따라서 (i)~(iii)에서 구하는 최단 거리는 $\sqrt{85}$이다.

25 세 점 A$(-3,\ 3)$, B$(-1,\ -3)$, C$(3,\ 5)$로부터 같은 거리에 보관소를 세우려고 하므로 보관소의 좌표를 P$(a,\ b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서

$\{a-(-3)\}^2+(b-3)^2=\{a-(-1)\}^2+\{b-(-3)\}^2$

$a^2+6a+9+b^2-6b+9=a^2+2a+1+b^2+6b+9$

$4a-12b+8=0\qquad\cdots$ ㉠

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서

$\{a-(-1)\}^2+\{b-(-3)\}^2=(a-3)^2+(b-5)^2$

$a^2+2a+1+b^2+6b+9=a^2-6a+9+b^2-10b+25$

$8a+16b-24=0\qquad\cdots$ ㉡

㉠$\times2-$㉡을 하면

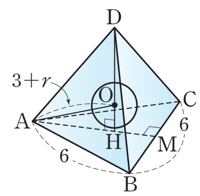
$-40b+40=0\qquad\therefore\ b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$4a-12+8=0 \qquad \therefore a=1$

따라서 $\mathrm{P}(1,\ 1)$이므로 보관소의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

26 4개의 구의 중심을 각각 A, B, C, D라 하고 각 구의 중심을 선분으로 이으면 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 D-ABC를 만들 수 있다.



이때 점 D에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 H는 △ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$,

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

△DAH에서 $\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

이때 작은 구의 중심을 O, 이 구의 반지름의 길이를 r라 하면 점 O는 $\overline{\mathrm{DH}}$ 위에 있으므로 △OAH에서

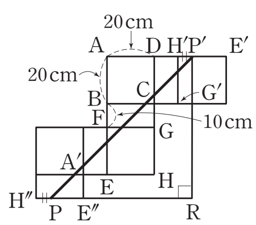
$\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{AH}}^2=(\overline{\mathrm{DH}}-\overline{\mathrm{DO}})^2+\overline{\mathrm{AH}}^2$

$(3+r)^2=\{2\sqrt{6}-(3+r)\}^2+(2\sqrt{3})^2$

$4\sqrt{6}(3+r)=36 \qquad \therefore r=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-3$

따라서 작은 구의 반지름의 길이는 $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}-3$이다.

27



위의 그림과 같은 직육면체의 전개도에서 끈이 $\overline{\mathrm{H''E''}}$을 지나는 점을 P, $\overline{\mathrm{H'E'}}$을 지나는 점을 P′이라 하고, 점 P′에서 $\overline{\mathrm{H''E''}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 R라 하면 구하는 끈의 최소 길이는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 길이와 같다.

이때 $\overline{\mathrm{H''P}}=\overline{\mathrm{H'P'}}$이므로

△P′PR에서

$\overline{\mathrm{P'R}}=20+10+20+10=60\,(\mathrm{cm})$,

$\overline{\mathrm{PR}}=20+10+20+10=60\,(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{\mathrm{PP'}}=\sqrt{60^2+60^2}$

$=60\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$

따라서 필요한 끈의 최소 길이는 $60\sqrt{2}$ cm이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 43~44

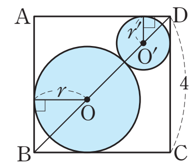
01 $(48-32\sqrt{2})\pi$ **02** $(200-100\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$ **03** $\dfrac{96-32\sqrt{3}}{3}$

04 $2\sqrt{21}$ **05** $6\sqrt{3}-9$ **06** $5\sqrt{11}\,\mathrm{cm}^2$ **07** 1344π

08 $5\sqrt{5}$ cm

01 길잡이 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하고, 두 반지름 사이의 관계식을 세운다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하면



$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$이고

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BO}}+\overline{\mathrm{OO'}}+\overline{\mathrm{O'D}}$이므로

$4\sqrt{2}=\sqrt{2}r+r+r'+\sqrt{2}r'$

$4\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})r=(1+\sqrt{2})r'$

$\therefore r'=8-4\sqrt{2}-r$

∴ (두 원의 넓이의 합)

$=\pi r^2+\pi r'^2$

$=\pi(r^2+r'^2)$

$=\pi\{r^2+(8-4\sqrt{2}-r)^2\}$

$=\pi\{r^2+(8-4\sqrt{2})^2-(16-8\sqrt{2})r+r^2\}$

$=\pi\{2r^2+(8\sqrt{2}-16)r+96-64\sqrt{2}\}$

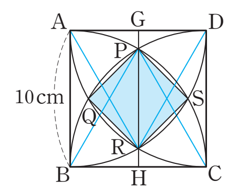
$=2\pi\{r^2-(8-4\sqrt{2})r\}+(96-64\sqrt{2})\pi$

$=2\pi\{r-(4-2\sqrt{2})\}^2+(48-32\sqrt{2})\pi$

따라서 두 원 O, O′의 넓이의 합의 최솟값은 $(48-32\sqrt{2})\pi$이다.

02 길잡이 △PBC, △RDA가 정삼각형임을 이용하여 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림에서 △PBC는 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형이므로



$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{\mathrm{GP}}=\overline{\mathrm{GH}}-\overline{\mathrm{PH}}=10-5\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

같은 방법으로

$\overline{\mathrm{RH}}=(10-5\sqrt{3})$ cm이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=10-2\times(10-5\sqrt{3})$

$=10\sqrt{3}-10\,(\mathrm{cm})$

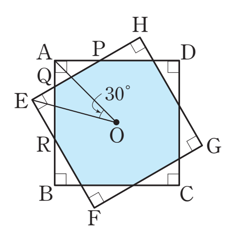
따라서 정사각형 PQRS의 대각선의 길이가 $(10\sqrt{3}-10)$ cm이므로

$\square\mathrm{PQRS}=\dfrac{1}{2}\times(10\sqrt{3}-10)^2$

$=200-100\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

03 길잡이 $\overline{\mathrm{EH}}$와 $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 각각 P, Q라 하고, ∠APQ=30°임을 이용하여 △AQP의 세 변의 길이를 각각 한 문자에 관하여 나타내어 본다.

오른쪽 그림에서 □EFGH가 회전하면서 생긴 삼각형들은 모두 합동인 직각삼각형이다. 이때 $\overline{\mathrm{EH}}$는 $\overline{\mathrm{AD}}$를 30°만큼 회전시킨 것이므로 ∠APQ=30°



따라서 △AQP에서

$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PQ}}=1:\sqrt{3}:2$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2x$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2x$, $\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}x$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RB}}$이므로

$4=x+2x+\sqrt{3}x$, $(3+\sqrt{3})x=4$

$\therefore x=\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

$\triangle AQP=\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left\{\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}\right\}^2$

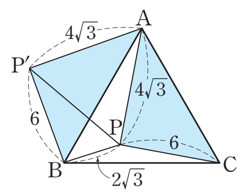
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4(12-6\sqrt{3})}{9}=\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\square ABCD-4\triangle AQP$

$=4^2-4\times\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$

$=\frac{96-32\sqrt{3}}{3}$

04 **길잡이** $\triangle APC$를 점 A를 중심으로 하여 시계 방향으로 점 C가 점 B에 오도록 60°만큼 회전시켜 본다.



오른쪽 그림과 같이 $\triangle APC$를 점 A를 중심으로 하여 시계 방향으로 점 C가 점 B에 오도록 60°만큼 회전시킨 다음 $\overline{PP'}$을 그으면

$\overline{AP'}=\overline{AP}=4\sqrt{3}$, $\angle P'AP=60^\circ$

이므로 $\triangle AP'P$는 정삼각형이다.

$\therefore\ \overline{P'P}=4\sqrt{3}$

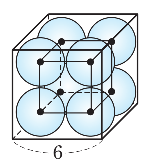
$\overline{P'B}:\overline{BP}:\overline{P'P}=6:2\sqrt{3}:4\sqrt{3}=\sqrt{3}:1:2$이므로

$\triangle P'BP$는 $\angle P'BP=90^\circ$, $\angle BP'P=30^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 $\angle AP'B=\angle AP'P+\angle BP'P=60^\circ+30^\circ=90^\circ$이므로

$\triangle AP'B$에서 $\overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{21}$

05 **길잡이** 구의 반지름의 길이를 r라 하고, 8개의 구의 중심을 연결하여 만든 정육면체의 대각선의 길이를 r를 이용한 식으로 나타내어 본다.



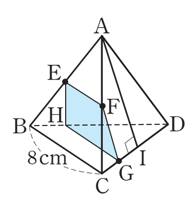
구의 반지름의 길이를 r라 하고, 오른쪽 그림과 같이 정육면체의 세 면에 접하는 8개의 구의 중심을 선분으로 이으면 한 모서리의 길이가 $6-2r$이고, 대각선의 길이가 $4r$인 정육면체가 만들어진다.

따라서 정육면체의 대각선의 길이는 한 모서리의 길이의 $\sqrt{3}$배이므로

$4r=\sqrt{3}(6-2r)$, $(4+2\sqrt{3})r=6\sqrt{3}$

$\therefore\ r=6\sqrt{3}-9$

06 **길잡이** 정사면체를 세 점 E, F, G를 지나는 평면으로 잘랐을 때, 생긴 단면의 모양은 등변사다리꼴임을 알고 그 넓이를 구한다.



정사면체를 세 점 E, F, G를 지나는 평면으로 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.

$\triangle ABC$에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4\,(cm)$

점 A에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{CI}=\overline{DI}$이고 $\overline{CG}:\overline{GD}=1:3$이므로 점 G는 $\overline{CI}$의 중점이다.

$\therefore\ \overline{CG}=\frac{1}{2}\overline{CI}=\frac{1}{4}\overline{CD}=\frac{1}{4}\times 8=2\,(cm)$

$\triangle ACI$에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해 $\overline{FG}\,/\!/\,\overline{AI}$이므로 $\angle FGC=\angle AIC=90^\circ$

$\triangle FCG$에서

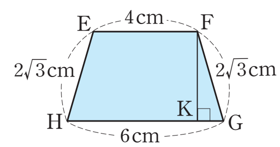
$\overline{FG}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}\,(cm)$

또 $\overline{EF}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\overline{HG}\,/\!/\,\overline{BC}$이고

$\triangle DBC$에서

$\overline{HG}=\frac{3}{4}\overline{BC}=\frac{3}{4}\times 8=6\,(cm)$,

$\overline{BH}=\overline{CG}=2\,cm$, $\overline{EH}=\overline{FG}=2\sqrt{3}\,cm$



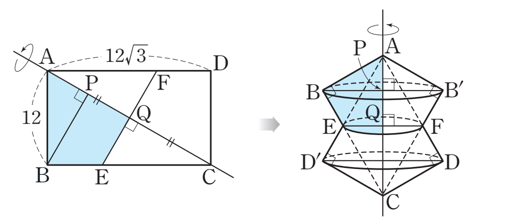
이때 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{HG}$에 내린 수선의 발을 K라 하면

$\overline{KG}=\frac{1}{2}\times(6-4)=1\,(cm)$

이므로 $\triangle FKG$에서 $\overline{FK}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{11}\,(cm)$

$\therefore$ (단면의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(4+6)\times\sqrt{11}=5\sqrt{11}\,(cm^2)$

07 **길잡이** 회전체를 회전축을 포함한 평면으로 잘랐을 때의 단면의 모양을 생각해 본다.



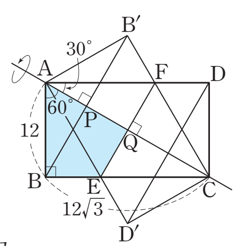
위의 그림과 같이 $\overline{AC}$의 중점을 Q라 하고, $\overline{AC}$의 수직이등분선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을 E라 하면 구하는 회전체의 부피는 $\square ABEQ$를 $\overline{AC}$를 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 입체도형의 부피의 2배이다.

$\overline{AC}=\sqrt{12^2+(12\sqrt{3})^2}=24$

$\triangle ABC$에서 세 변의 길이의 비가

$12:12\sqrt{3}:24=1:\sqrt{3}:2$이므로

$\angle BAC=60^\circ$



회전체를 회전축을 포함한 평면으로 잘랐을 때 단면의 모양은 오른쪽 그림과 같다.

$\triangle ABP$에서 $\overline{AB}=12$이고,

$\overline{AB}:\overline{AP}:\overline{BP}=2:1:\sqrt{3}$이므로

$\overline{AP}=6$, $\overline{BP}=6\sqrt{3}$

$\overline{AD'}$과 $\overline{AD}$는 $\overline{AC}$에 대하여 대칭이므로

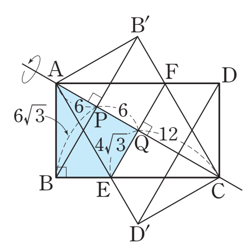
$\angle D'AC=\angle DAC=30^\circ$

$\triangle AEQ$에서 $\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 24=12$이고,

$\overline{EQ}:\overline{AQ}=1:\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}\,\overline{EQ}=12\qquad\therefore\ \overline{EQ}=4\sqrt{3}$

또 $\overline{PQ}=12-6=6$, $\overline{QC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=12$



따라서 오른쪽 그림에서 $\overline{AP}$를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_1은

$V_1=\frac{1}{3}\times\{\pi\times(6\sqrt{3})^2\}\times 6$

$=216\pi$

$\overline{CP}$를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_2는

$V_2=\frac{1}{3}\times\{\pi\times(6\sqrt{3})^2\}\times(6+12)$

$=648\pi$

$\overline{CQ}$를 높이로 하는 원뿔의 부피 V_3는

$V_3=\frac{1}{3}\times\{\pi\times(4\sqrt{3})^2\}\times 12$

$=192\pi$

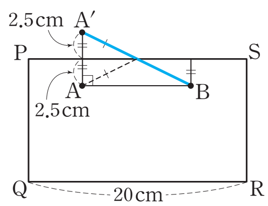
$\therefore$ (구하는 회전체의 부피)$=2\times\{V_1+(V_2-V_3)\}$

$=2\times\{216\pi+(648\pi-192\pi)\}$

$=1344\pi$

08 **길잡이** 원기둥 모양의 통의 옆면의 전개도 위에 최단 거리를 표시해 본다.

원기둥 모양의 통에서 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.



점 A와 $\overline{PS}$에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

□PQRS에서

$\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{QR}=\frac{1}{2}\times 20=10\,(\text{cm})$

따라서 이 통의 바깥쪽 면의 점 A에서 안쪽 면의 점 B까지 면을 따라가는 최단 거리는

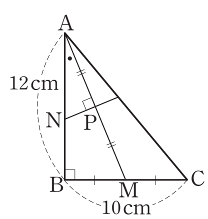
$\overline{A'B}=\sqrt{10^2+(2.5+2.5)^2}=5\sqrt{5}\,(\text{cm})$

서술형 완성하기 P. 45~46

1 $\frac{169}{24}$ cm **2** $\frac{200}{3}$ cm^2 **3** 6 **4** $10\sqrt{3}$ cm

5 (1) 8, $2\sqrt{21}$ (2) $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ **6** 50 cm **7** 풀이 참조

1 오른쪽 그림에서



$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10=5\,(\text{cm})$이므로

△ABM에서

$\overline{AM}=\sqrt{12^2+5^2}=13\,(\text{cm})$ ⋯ (i)

$\overline{AM}$의 중점을 P라 하면

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AM}=\frac{1}{2}\times 13=\frac{13}{2}\,(\text{cm})$ ⋯ (ii)

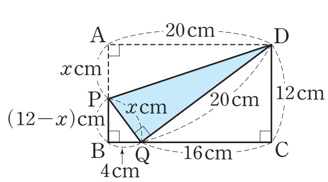
이때 △ABM∽△APN (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AM}:\overline{AN}$에서

$12:\frac{13}{2}=13:\overline{AN}$ $\quad\therefore \overline{AN}=\frac{169}{24}\,(\text{cm})$ ⋯ (iii)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AM}$의 길이 구하기	30 %
(ii) $\overline{AP}$의 길이 구하기	30 %
(iii) △ABM∽△APN임을 이용하여 $\overline{AN}$의 길이 구하기	40 %

2 오른쪽 그림에서



$\overline{AP}=\overline{PQ}=x$ cm라 하면

$\overline{BP}=(12-x)$ cm ⋯ (i)

$\overline{QD}=\overline{AD}=20$ cm이므로

△DQC에서

$\overline{QC}=\sqrt{20^2-12^2}=16\,(\text{cm})$

$\therefore \overline{BQ}=\overline{BC}-\overline{QC}=20-16=4\,(\text{cm})$ ⋯ (ii)

△PBQ에서 $x^2=(12-x)^2+4^2$

$24x=160$ $\quad\therefore x=\frac{20}{3}$ ⋯ (iii)

$\therefore$ △PQD$=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QD}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\times 20=\frac{200}{3}\,(\text{cm}^2)$ ⋯ (iv)

채점 기준	배점
(i) $\overline{BP}$의 길이를 $\overline{AP}$에 관하여 나타내기	20 %
(ii) $\overline{BQ}$의 길이 구하기	30 %
(iii) $\overline{AP}$의 길이 구하기	20 %
(iv) △PQD의 넓이 구하기	30 %

3 $\overline{AC}=\sqrt{6^2+(6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{3}$ ⋯ (i)

△ACD에서

$\overline{AC}\times\overline{DH}=\overline{AD}\times\overline{CD}$이므로

$6\sqrt{3}\times\overline{DH}=6\sqrt{2}\times 6$ $\quad\therefore \overline{DH}=2\sqrt{6}$ ⋯ (ii)

△AHD에서

$\overline{AH}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2}=4\sqrt{3}$ ⋯ (iii)

$\therefore \overline{CH}=\overline{AC}-\overline{AH}=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ⋯ (iv)

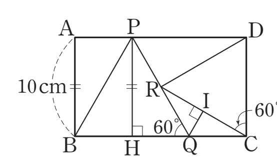
이때 $\overline{BH}^2+\overline{DH}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2$이므로

$\overline{BH}^2+(2\sqrt{6})^2=(4\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2$

$\overline{BH}^2=36$ $\quad\therefore \overline{BH}=6\,(\because \overline{BH}>0)$ ⋯ (v)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AC}$의 길이 구하기	10 %
(ii) $\overline{DH}$의 길이 구하기	20 %
(iii) $\overline{AH}$의 길이 구하기	20 %
(iv) $\overline{CH}$의 길이 구하기	20 %
(v) $\overline{BH}$의 길이 구하기	30 %

4 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PH}=\overline{AB}=10$ cm이므로

△PBQ에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{BQ}=10$ $\quad\therefore \overline{BQ}=\frac{20\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$ ⋯ (i)

△QCR에서 $\angle QCR=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

$\angle QRC=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

즉, △QCR는 $\overline{QC}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이므로 점 Q에서 $\overline{CR}$에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{CI}=\frac{1}{2}\overline{CR}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 10=5\,(\text{cm})$

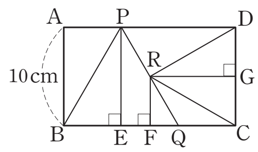
$\overline{QC}:\overline{CI}=2:\sqrt{3}$이므로 $\overline{QC}:5=2:\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\times\overline{QC}=10$ $\quad\therefore \overline{QC}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$ ⋯ (ii)

$\therefore \overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{QC}=\frac{20\sqrt{3}}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{3}\,(\text{cm})$ ⋯ (iii)

채점 기준	배점
(i) $\overline{BQ}$의 길이 구하기	30 %
(ii) $\overline{QC}$의 길이 구하기	50 %
(iii) $\overline{BC}$의 길이 구하기	20 %

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 E라 하고, 점 R에서 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하면



△PBQ에서 $\overline{PE}=10\,\text{cm}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{BQ}=10$ $\quad\therefore \overline{BQ}=\frac{20\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$ … (i)

$\overline{BE}=\overline{EQ}=\frac{1}{2}\overline{BQ}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$ … (ii)

△RCD에서 $\overline{CD}=10\,\text{cm}$이므로

$\overline{RG}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times10=5\sqrt{3}\,(\text{cm})$ … (iii)

$\overline{PD}/\!/\overline{RG}/\!/\overline{QC}$이므로 $\overline{PR}:\overline{RQ}=\overline{DG}:\overline{GC}=1:1$

즉, △PEQ에서 $\overline{PR}=\overline{RQ}$이고 $\overline{RF}/\!/\overline{PE}$이므로 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$\overline{FQ}=\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{EQ}=\frac{1}{2}\times\frac{10\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$ … (iv)

$\therefore \overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{FC}$

$=\overline{BE}+\overline{EF}+\overline{RG}$

$=\frac{10\sqrt{3}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{3}+5\sqrt{3}$

$=10\sqrt{3}\,(\text{cm})$ … (v)

채점 기준	배점
(i) $\overline{BQ}$의 길이 구하기	20 %
(ii) $\overline{BE}$의 길이 구하기	10 %
(iii) $\overline{RG}$의 길이 구하기	20 %
(iv) $\overline{EF}$의 길이 구하기	40 %
(v) $\overline{BC}$의 길이 구하기	10 %

5 (1) 부채꼴의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이는 같으므로 컵 A의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$2\pi\times10\times\frac{216}{360}=2\pi r_1,\ 12\pi=2\pi r_1$

$\therefore r_1=6$ … (i)

컵 A의 높이를 h_1이라 하면

$h_1=\sqrt{10^2-6^2}=8$ … (ii)

컵 B의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r_2라 하면

$2\pi\times10\times\frac{144}{360}=2\pi r_2,\ 8\pi=2\pi r_2$

$\therefore r_2=4$ … (iii)

컵 B의 높이를 h_2라 하면

$h_2=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$ … (iv)

(2) $V_1=\frac{1}{3}\times(\pi\times6^2)\times8=96\pi$

$V_2=\frac{1}{3}\times(\pi\times4^2)\times2\sqrt{21}=\frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$ … (v)

$\therefore \frac{V_1}{V_2}=96\pi\div\frac{32\sqrt{21}}{3}\pi$

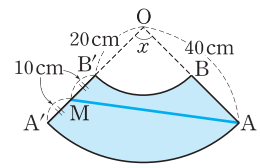
$=96\pi\times\frac{3}{32\sqrt{21}\pi}$

$=\frac{9}{\sqrt{21}}$

$=\frac{3\sqrt{21}}{7}$ … (vi)

채점 기준	배점
(i) 컵 A의 밑면인 원의 반지름의 길이 구하기	20 %
(ii) 컵 A의 높이 구하기	10 %
(iii) 컵 B의 밑면인 원의 반지름의 길이 구하기	20 %
(iv) 컵 B의 높이 구하기	10 %
(v) V_1, V_2의 값 각각 구하기	각 10 %
(vi) $\frac{V_1}{V_2}$의 값 구하기	20 %

6 원뿔대의 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 구하는 최단 거리는 $\overline{AM}$의 길이와 같다. … (i)



이때 $\overline{OB}:\overline{OA}=1:2$이므로

$\overline{OB}:(\overline{OB}+20)=1:2$에서

$\overline{OB}=20\,(\text{cm})$ … (ii)

$\angle A'OA=\angle x$라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times40\times\frac{x}{360}=2\pi\times10$ $\quad\therefore \angle x=90^\circ$ … (iii)

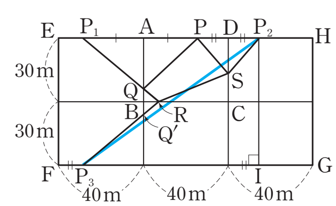
따라서 △OMA에서

$\overline{AM}=\sqrt{40^2+(20+10)^2}=50\,(\text{cm})$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) 원뿔대의 전개도를 그리고, 최단 거리 표시하기	20 %
(ii) $\overline{OB}$의 길이 구하기	20 %
(iii) 부채꼴의 중심각의 크기 구하기	30 %
(iv) 최단 거리 구하기	30 %

7 |예시 답안|

오른쪽 그림과 같이 점 P가 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$와 대칭인 점을 각각 P_1, P_2라 하면



$\overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{P_1Q}+\overline{QR}$

$\overline{PS}+\overline{SR}=\overline{P_2S}+\overline{SR}$

또 두 점 P_1, Q가 직선 BC와 대칭인 점을 각각 P_3, Q′이라 하면

$\overline{P_1Q}+\overline{QR}=\overline{P_3Q'}+\overline{Q'R}$

이므로 P 지점에서 출발하여 다시 P 지점으로 돌아오는 최단 거리는 $\overline{P_2P_3}$의 길이이다. … (i)

이때 점 P_2에서 $\overline{FG}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\triangle P_2P_3I$에서

$\overline{P_2P_3}=\sqrt{(40+40)^2+(30+30)^2}=\sqrt{10000}=100\,(\text{m})$ … (ii)

따라서 관람객이 분당 18 m의 속력으로 전시장을 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{100}{18}=5.55\cdots$(분)이고 세 지점 Q, R, S에 각각 최소 5분씩 머물게 되므로 전시장을 모두 관람하고 나가는 데 걸리는 시간은 최소 $5+5+5+5.55\cdots=20.55\cdots$(분)이다.

따라서 관람객은 20분 안에 전시장을 관람하고 나올 수 없다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) 두 점 P, Q와 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overleftrightarrow{BC}$와 대칭인 점을 각각 잡고 최단 거리 나타내기	30 %
(ii) $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$의 최단 거리 구하기	30 %
(iii) 20분 안에 관람하고 나올 수 있는지 말하기	40 %

단원 마무리하기

P. 47~50

1 13	**2** ②	**3** 70	**4** $3\sqrt{5}$	**5** ③	**6** ⑤
7 ②, ③	**8** 7, 과정은 풀이 참조			**9** ④	**10** $\frac{12}{5}$
11 $2\sqrt{6}$	**12** ③	**13** ④	**14** ②	**15** ③	**16** ④
17 $\frac{5\sqrt{26}}{6}$ cm		**18** ②	**19** $5\sqrt{11}\,\text{cm}^2$, 과정은 풀이 참조		
20 $\frac{32\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}^3$		**21** ③	**22** ③	**23** ③	**24** 26π cm

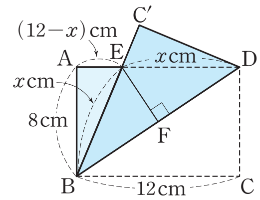
1 $\overline{BD}$를 그으면
$\triangle ABD$에서 $\overline{BD}=\sqrt{14^2+3^2}=\sqrt{205}$
$\triangle BCD$에서 $\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{205})^2-6^2}=\sqrt{169}=13$

2 ㄱ. $\overline{DA}/\!/\overline{BC}$일 때 $\triangle DBC$와 $\triangle ABC$의 넓이는 같다.
그런데 $\overline{DA}/\!/\overline{BC}$인지 알 수 없다.
ㄴ. $\triangle DBC \equiv \triangle ABI$ (SAS 합동)이므로
$\triangle DBC=\triangle ABI$
이때 $\overline{BI}<\overline{AK}$이므로 $\triangle ABI<\triangle ABK$
$\therefore \triangle DBC<\triangle ABK$
ㄷ. $\overline{EC}/\!/\overline{DB}$이므로 $\triangle DBC=\triangle DBA$
이때 $\triangle DBA=\triangle AED=\frac{1}{2}\square DBAE$이므로
$\triangle DBC=\triangle AED$
ㄹ. ㄴ에서 $\triangle DBC=\triangle ABI$
그런데 $\overline{BI}/\!/\overline{AK}$이므로 $\triangle ABI=\triangle JBI$
$\therefore \triangle DBC=\triangle JBI<\triangle BKC$
ㅁ. $\overline{DG}/\!/\overline{BC}$일 때 $\triangle DBC$와 $\triangle GBC$의 넓이는 같다.
그런데 $\overline{DG}/\!/\overline{BC}$인지 알 수 없다.
ㅂ. ㄹ에서 $\triangle DBC=\triangle JBI$
이때 $\triangle JBI=\triangle JIK=\frac{1}{2}\square BIKJ$이므로
$\triangle DBC=\triangle JIK$
따라서 $\triangle DBC$와 넓이가 같은 것은 ㄷ, ㅂ의 2개이다.

3 $\triangle AOD$에서 $\overline{AD}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$
$\square ABCD$의 두 대각선이 직교하므로
$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$
$=(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{13})^2=70$
다른 풀이 $\overline{BO}=b$, $\overline{CO}=c$라 하면
$\triangle BCO$에서 $b^2+c^2=(3\sqrt{2})^2=18$이므로
$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=(b^2+4^2)+(c^2+6^2)$
$=(b^2+c^2)+4^2+6^2$
$=18+16+36=70$

4 $\overline{AE}=\overline{AC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,
$\overline{AG}=\overline{AF}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+3^2}=3\sqrt{3}$,
$\overline{AI}=\overline{AH}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$
$\therefore \overline{AK}=\overline{AJ}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

5 오른쪽 그림에서



$\triangle ABE \equiv \triangle C'DE$ (ASA 합동)
이므로
$\overline{BE}=\overline{DE}=x\,\text{cm}$라 하면
$\overline{AE}=(12-x)$ cm
$\triangle ABE$에서 $x^2=8^2+(12-x)^2$
$24x=208 \quad \therefore x=\frac{26}{3}$
$\triangle BDC$에서 $\overline{BD}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$ (cm)
이때 $\triangle EBD$가 이등변삼각형이므로
$\overline{BF}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{13}=2\sqrt{13}$ (cm)
따라서 $\triangle EBF$에서 $\overline{EF}=\sqrt{\left(\frac{26}{3}\right)^2-(2\sqrt{13})^2}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$ (cm)
다른 풀이 $\triangle ABE \equiv \triangle C'DE$ (ASA 합동)이므로
$\overline{BE}=\overline{DE}=x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{AE}=(12-x)$ cm
$\triangle ABE$에서 $x^2=8^2+(12-x)^2$
$24x=208 \quad \therefore x=\frac{26}{3}$
$\triangle BDC$에서 $\overline{BD}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$ (cm)
$\triangle EBF$와 $\triangle DBC$에서
$\angle EBF=\angle DBC$ (접은 각), $\angle EFB=\angle DCB=90^\circ$
$\therefore \triangle EBF \backsim \triangle DBC$ (AA 닮음)
즉, $\overline{BE}:\overline{BD}=\overline{EF}:\overline{DC}$이므로 $\frac{26}{3}:4\sqrt{13}=\overline{EF}:8$
$4\sqrt{13}\times\overline{EF}=\frac{208}{3} \qquad \therefore \overline{EF}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$ (cm)

6 ⑤ $c^2+a^2>b^2$이면 $\angle B<90^\circ$이지만 $\angle A$, $\angle C$의 크기를 알 수 없으므로 예각삼각형인지 알 수 없다.

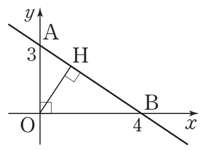
7 필요한 막대의 길이를 x cm라 하면
(i) x cm가 가장 긴 변의 길이인 경우
$x^2=3^2+4^2$에서 $x^2=25$
$\therefore x=5\,(\because x>0)$
(ii) 4 cm가 가장 긴 변의 길이인 경우
$4^2=x^2+3^2$에서 $x^2=7$
$\therefore x=\sqrt{7}\,(\because x>0)$
따라서 필요한 막대의 길이는 $\sqrt{7}$ cm, 5 cm이다.

8 $2x-1-(x+5)=x-6>0\,(\because x>6)$
$\therefore 2x-1>x+5$
즉, 가장 긴 변의 길이는 $2x-1$이다. … (i)
이 삼각형이 직각삼각형이 되려면
$(2x-1)^2=(x-2)^2+(x+5)^2$ … (ii)
$x^2-5x-14=0$, $(x+2)(x-7)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$
그런데 $x>6$이므로 $x=7$ … (iii)

채점 기준	배점
(i) 가장 긴 변의 길이가 $2x-1$임을 알기	30 %
(ii) x에 대한 식 세우기	30 %
(iii) x의 값 구하기	40 %

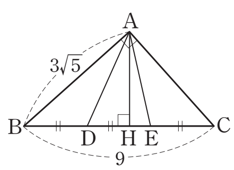
9 $\overline{BH}:\overline{CH}=1:3$이므로
$\overline{BH}=a\,\text{cm}$, $\overline{CH}=3a\,\text{cm}$라 하면
$\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}$이므로
$(2\sqrt{3})^2=a\times 3a$, $a^2=4$ $\therefore a=2(\because a>0)$
$\triangle AHC$에서 $\overline{CH}=3a=3\times 2=6\,(\text{cm})$이므로
$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

10 오른쪽 그림에서



$A(0,\ 3)$, $B(4,\ 0)$이므로
$\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=4$
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$
원점에서 직선 $3x+4y=12$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle AOB$의 넓이에서
$\frac{1}{2}\times 5\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times 4\times 3$ $\therefore \overline{OH}=\frac{12}{5}$
따라서 구하는 선분의 길이는 $\frac{12}{5}$이다.

11 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

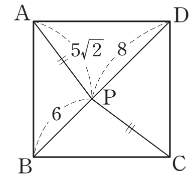


$\triangle ABC$에서
$\overline{AC}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{5})^2}=6$이고
$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로
$3\sqrt{5}\times 6=9\times\overline{AH}$ $\therefore \overline{AH}=2\sqrt{5}$
$\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$이므로
$(3\sqrt{5})^2=\overline{BH}\times 9$ $\therefore \overline{BH}=5$
$\therefore \overline{DH}=\overline{BH}-\overline{BD}=5-\frac{1}{3}\times 9=2$
따라서 $\triangle ADH$에서 $\overline{AD}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{6}$

12 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$
$\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BH}$이므로
$4\times 4\sqrt{2}=4\sqrt{3}\times\overline{BH}$ $\therefore \overline{BH}=\frac{4\sqrt{6}}{3}\,(\text{cm})$
$\overline{AB}^2=\overline{AH}\times\overline{AC}$이므로
$4^2=\overline{AH}\times 4\sqrt{3}$ $\therefore \overline{AH}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$이므로
$\overline{HM}=\overline{AM}-\overline{AH}=2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,(\text{cm})$
$\therefore \triangle BMH=\frac{1}{2}\times\overline{HM}\times\overline{BH}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\,(\text{cm}^2)$

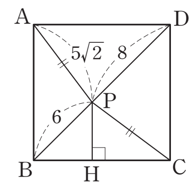
13 $\triangle ABC$에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해
$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 14=7$
이때 $\overline{BE}^2+\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$이므로
$\overline{BE}^2+\overline{CD}^2=7^2+14^2=245$

14 오른쪽 그림에서



$\triangle PBA\equiv\triangle PBC$ (SSS 합동)이므로
$\angle PBA=\angle PBC=45^\circ$
즉, 점 P는 □ABCD의 대각선 BD 위의 점이므로 $\overline{PD}$를 그으면
$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$에서
$6^2+\overline{PD}^2=(5\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2$
$\overline{PD}^2=64$ $\therefore \overline{PD}=8(\because \overline{PD}>0)$
따라서 $\overline{BD}=\overline{BP}+\overline{PD}=6+8=14$이므로
$14=\sqrt{2}\times\overline{BC}$에서 $\overline{BC}=7\sqrt{2}$

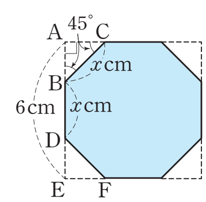
다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle PBA\equiv\triangle PBC$ (SSS 합동)이므로
$\angle PBA=\angle PBC=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$
$\triangle PBH$에서
$\overline{PB}:\overline{BH}:\overline{PH}=\sqrt{2}:1:1$
$\therefore \overline{BH}=\overline{PH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{PB}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$
$\triangle PHC$에서 $\overline{HC}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$
$\therefore \overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}$
$=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

15 $\overline{AB}=x\,\text{cm}$, $\overline{AC}=y\,\text{cm}$라 하면
(색칠한 부분의 넓이)$=\triangle ABC=\frac{1}{2}xy=9\,(\text{cm}^2)$
$\therefore xy=18$
$\triangle ABC$에서 $x^2+y^2=8^2=64$
$(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy=64+2\times 18=100$
$\therefore x+y=10(\because x+y>0)$
$\therefore$ ($\triangle ABC$의 둘레의 길이)$=x+y+8=10+8=18\,(\text{cm})$

16 정팔각형의 한 외각의 크기는

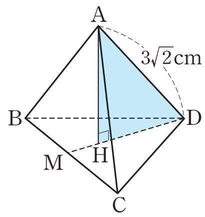


$\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$이므로 오른쪽 그림에서
$\triangle ABC$는 세 내각의 크기가 45°, 45°, 90°인 직각삼각형이다.
정팔각형의 한 변의 길이를 $x\,\text{cm}$라 하면
$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}$이므로
$\overline{AB}:x=1:\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\times\overline{AB}=x$
$\therefore \overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}x\,(\text{cm})$
같은 방법으로 $\triangle DEF$에서 $\overline{DE}=\frac{\sqrt{2}}{2}x\,\text{cm}$
그런데 $\overline{AE}=6\,\text{cm}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}x+x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=6$
$(\sqrt{2}+1)x=6$ $\therefore x=6(\sqrt{2}-1)$
따라서 정팔각형의 한 변의 길이는 $6(\sqrt{2}-1)\,\text{cm}$이다.

17 $\overline{AG}=\sqrt{5^2+4^2+7^2}=3\sqrt{10}\,(\text{cm})$
$\overline{AF}$를 그으면 $\overline{AF}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}\,(\text{cm})$

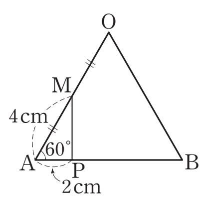
$\triangle AFG$에서 $\angle AFG=90°$, $\overline{FP}\perp\overline{AG}$이므로
$\overline{AF}\times\overline{FG}=\overline{AG}\times\overline{FP}$에서
$\sqrt{65}\times5=3\sqrt{10}\times\overline{FP}$ $\therefore\ \overline{FP}=\dfrac{5\sqrt{26}}{6}\,(cm)$

18 오른쪽 그림과 같이 $\overline{DH}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 M이라 하면

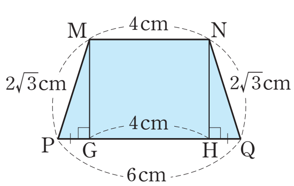


$\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times3\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\,(cm)$
점 H는 밑면인 $\triangle BCD$의 무게중심이므로
$\overline{DH}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}\,(cm)$
$\overline{AH}$는 정사면체의 높이이므로
$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{3}\,(cm)$
$\therefore\ \triangle AHD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times2\sqrt{3}=3\sqrt{2}\,(cm^2)$

19 $\triangle OAC$에서 두 점 M, N은 각각 $\overline{OA}$, $\overline{OC}$의 중점이므로 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해
$\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times8=4\,(cm)$ … (i)
$\triangle BCA$와 $\triangle BQP$에서 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{CQ}:\overline{QB}=1:3$이고
$\angle ABC$는 공통이므로
$\triangle BCA\backsim\triangle BQP$ (SAS 닮음)
$\therefore\ \overline{PQ}=\dfrac{3}{4}\overline{AC}=\dfrac{3}{4}\times8=6\,(cm)$ … (ii)
오른쪽 그림의 $\triangle APM$에서



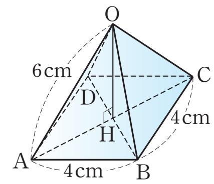
$\angle A=60°$, $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\times8=4\,(cm)$,
$\overline{AP}=\dfrac{1}{4}\times8=2\,(cm)$
이때 $\overline{AM}:\overline{AP}=4:2=2:1$이므로
$\angle APM=90°$이고
$\overline{MP}=\sqrt{3}\times\overline{AP}=\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}\,(cm)$
같은 방법으로 오른쪽 그림에서
$\overline{NQ}=2\sqrt{3}\,cm$ … (iii)



따라서 □MPQN은 등변사다리꼴이고, 오른쪽 그림과 같이 두 점 M, N에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면
$\overline{PG}=\overline{HQ}=\dfrac{1}{2}\times(6-4)$
$=1\,(cm)$
$\triangle MPG$에서 $\overline{MG}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{11}\,(cm)$ … (iv)
$\therefore\ \square MPQN=\dfrac{1}{2}\times(4+6)\times\sqrt{11}=5\sqrt{11}\,(cm^2)$ … (v)

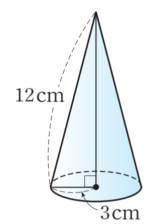
채점 기준	배점
(i) $\overline{MN}$의 길이 구하기	20 %
(ii) $\overline{PQ}$의 길이 구하기	20 %
(iii) $\overline{MP}$, $\overline{NQ}$의 길이 각각 구하기	각 10 %
(iv) □MPQN의 높이 구하기	20 %
(v) □MPQN의 넓이 구하기	20 %

20 주어진 전개도로 만들어지는 사각뿔은 오른쪽 그림과 같은 정사각뿔이다.



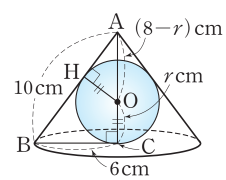
$\overline{AC}=\sqrt{2}\times4=4\sqrt{2}\,(cm)$
$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\,(cm)$
$\triangle OAH$에서
$\overline{OH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}\,(cm)$
$\therefore$ (사각뿔의 부피)$=\dfrac{1}{3}\times4^2\times2\sqrt{7}=\dfrac{32\sqrt{7}}{3}\,(cm^3)$

21 밑면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면
$2\pi r=6\pi$ $\therefore\ r=3$
옆면인 부채꼴의 반지름의 길이를 R cm라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로
$\dfrac{1}{2}\times R\times6\pi=36\pi$ $\therefore\ R=12$
따라서 주어진 전개도로 만든 원뿔은 오른쪽 그림과 같으므로



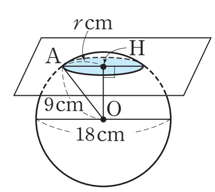
(원뿔의 높이)$=\sqrt{12^2-3^2}=3\sqrt{15}\,(cm)$
$\therefore$ (원뿔의 부피)$=\dfrac{1}{3}\times(\pi\times3^2)\times3\sqrt{15}$
$=9\sqrt{15}\pi\,(cm^3)$

22 오른쪽 그림에서 구의 반지름의 길이를 r cm라 하고, 구의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



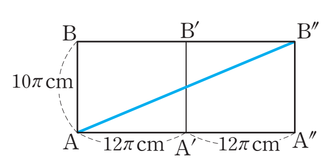
(원뿔의 높이)$=\sqrt{10^2-6^2}=8\,(cm)$이고
$\triangle AOH\backsim\triangle ABC$ (AA 닮음)이므로
$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OH}:\overline{BC}$에서
$(8-r):10=r:6$, $16r=48$ $\therefore\ r=3$
$\therefore$ (구의 부피)$=\dfrac{4}{3}\pi\times3^3=36\pi\,(cm^3)$

23 오른쪽 그림과 같이 평면으로 자른 단면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\pi r^2=36\pi$, $r^2=36$
$\therefore\ r=6\,(\because\ r>0)$
$\triangle AOH$에서
$\overline{AO}=\dfrac{1}{2}\times18=9\,(cm)$, $\overline{AH}=6\,cm$
이므로
$\overline{OH}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}\,(cm)$

24 점 A에서 원기둥의 옆면을 따라 두 바퀴 돌아 점 B에 이르는 최단 거리는 오른쪽 그림과 같은 원기둥의 옆면의 전개도에서 $\overline{AB''}$의 길이와 같다.



따라서 $\overline{AA'}$의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로
$\overline{AA'}=\overline{A'A''}=2\pi\times6=12\pi\,(cm)$
$\therefore\ \overline{AB''}=\sqrt{(12\pi+12\pi)^2+(10\pi)^2}$
$=26\pi\,(cm)$

Ⅲ 삼각비

1 삼각비

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 52~54

1 ④	2 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$	3 $\frac{2}{3}$	4 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	5 $\frac{8}{3}$	6 $\frac{27}{20}$
7 $\frac{3}{4}$	8 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	9 $6\sqrt{6}$	10 ③	11 $-2\sqrt{3}$	12 ⑤
13 ④	14 $\frac{5\sqrt{3}}{6}$	15 7.986			

1 $\overline{AB}=\sqrt{17^2-15^2}=8$

① $\sin A=\frac{15}{17}$ ② $\cos A=\frac{8}{17}$

③ $\tan A=\frac{15}{8}$ ⑤ $\cos C=\frac{15}{17}$

2 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$이므로 $\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=2k\,(k>0)$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{(3k)^2+(2k)^2}=\sqrt{13}k$

$\therefore \cos B=\frac{3k}{\sqrt{13}k}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

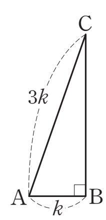
3 $\tan A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{2}$에서 $\overline{BC}=3\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{5})^2}=9$ $\quad\therefore \sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

4 $\overline{CE}=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$, $\overline{EG}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$\therefore \cos x=\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

5 $3\cos A-1=0$에서 $\cos A=\frac{1}{3}$



오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서

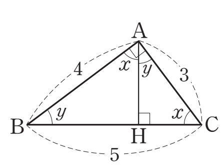
$\overline{AC}=3k$, $\overline{AB}=k\,(k>0)$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$이므로

$\sin A=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A=\frac{2\sqrt{2}k}{k}=2\sqrt{2}$

$\therefore \sin A\times\tan A=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times2\sqrt{2}=\frac{8}{3}$

6 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC\backsim\triangle HBA$ (AA 닮음)이므로

$\angle ACB=\angle HAB=\angle x$

또 $\triangle ABC\backsim\triangle HAC$ (AA 닮음)이므로

$\angle ABC=\angle HAC=\angle y$

따라서 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로

$\cos x=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{3}{5}$, $\tan y=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos x+\tan y=\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{27}{20}$

7 (주어진 식)$=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$

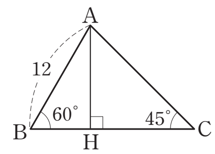
$=1-\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

8 $\tan(2x-15^\circ)=1$이므로

$2\angle x-15^\circ=45^\circ$, $2\angle x=60^\circ$ $\quad\therefore \angle x=30^\circ$

$\therefore \sin x\times\cos x=\sin 30^\circ\times\cos 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

9 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABH$에서 $\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{12}$이므로

$\overline{AH}=12\times\sin 60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

$\triangle AHC$에서 $\sin 45^\circ=\frac{6\sqrt{3}}{\overline{AC}}$이므로

$\overline{AC}=6\sqrt{3}\times\frac{1}{\sin 45^\circ}=6\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=6\sqrt{6}$

10 $\triangle CDB$에서

$\sin 30^\circ=\frac{6}{\overline{CD}}$, $\overline{CD}=6\times\frac{1}{\sin 30^\circ}=6\times2=12$

$\tan 30^\circ=\frac{6}{\overline{DB}}$, $\overline{DB}=6\times\frac{1}{\tan 30^\circ}=6\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{CD}+\overline{DB}=12+6\sqrt{3}$

$\triangle ADC$에서 $\overline{AD}=\overline{CD}$이고

$\angle DAC+\angle DCA=\angle CDB=30^\circ$이므로

$\angle DAC=\angle DCA=\frac{1}{2}\times30^\circ=15^\circ$

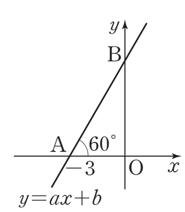
따라서 $\triangle ABC$에서

$\tan 75^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$,

$\tan 15^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{12+6\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$이므로

$\tan 75^\circ-\tan 15^\circ=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

11 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=ax+b$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면



$\triangle ABO$에서

(직선의 기울기)$=a$

$=\frac{(y\text{의 값의 증가량})}{(x\text{의 값의 증가량})}$

$=\frac{\overline{BO}}{\overline{AO}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

이때 직선 $y=\sqrt{3}x+b$가 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로

$0=-3\sqrt{3}+b$ $\quad\therefore b=3\sqrt{3}$

$\therefore a-b=\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

참고 직선 $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기를 $\angle\alpha$라 하면

⇨ (직선의 기울기)$=a=\tan\alpha$

12 ⑤ $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 $\angle c=\angle b$

$\therefore \sin c=\sin b=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\overline{OB}$

13 $\triangle DOC$에서 $\tan 39^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\dfrac{0.81}{1}=0.81$

$\triangle BOA$에서 $\angle BOA=39^\circ$이므로

$\angle OBA=90^\circ-39^\circ=51^\circ$

$\therefore \sin 51^\circ=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\dfrac{0.78}{1}=0.78$

$\therefore \tan 39^\circ+\sin 51^\circ=0.81+0.78=1.59$

14 (주어진 식)$=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\div\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1\times\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

15 $\angle C=180^\circ-(53^\circ+90^\circ)=37^\circ$이므로

$\cos 37^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BC}}{10}=0.7986$

$\therefore \overline{BC}=0.7986\times 10=7.986$

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 55~59

1 ① **2** $\dfrac{119}{12}$ **3** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **4** $\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ **5** $\dfrac{\sqrt{7}}{11}$ **6** ⑤

7 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **8** $\dfrac{4\sqrt{13}}{39}$ **9** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **10** ② **11** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ **12** $-\dfrac{3}{2}$

13 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ **14** $12\sqrt{3}-18$ **15** ③

16 $\sqrt{2}+1$ **17** ③ **18** $2-\sqrt{3}$ **19** $36\pi-30\sqrt{3}$

20 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ **21** 15° **22** $y=\dfrac{4}{3}x$ **23** $\dfrac{1}{4}$

24 ㄱ－ㄹ－ㄷ－ㅂ－ㄴ－ㅁ **25** ⑤ **26** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$시간

27 $2-\sqrt{2}$ **28** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

1 점 M은 직각삼각형 ABC의 빗변 BC의 중점이므로 $\triangle ABC$의 외심이다.

즉, $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}$이므로 $\triangle MAB$는 이등변삼각형이고

$\angle MBA=\angle MAB=\angle x$

$\triangle ABC$에서

$\overline{AC}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-6^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \tan x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\sqrt{13^2-12^2}=5$이므로

$\sin x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{13}$

이때 $\sin x=\cos y$이고 $\triangle ADC$에서 $\cos y=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{5}{13}$이므로

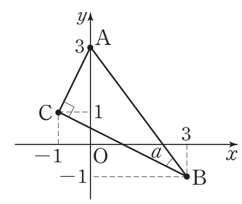
$\overline{AD}=13k$, $\overline{CD}=5k\,(k>0)$라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(13k)^2-(5k)^2}=12k=5 \qquad \therefore k=\dfrac{5}{12}$

따라서 $\overline{CD}=5k=5\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{25}{12}$이므로

$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=12-\dfrac{25}{12}=\dfrac{119}{12}$

3 세 점 $A(0,\ 3)$, $B(3,\ -1)$, $C(-1,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-3)^2}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+\{1-(-1)\}^2}$

$=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-1-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$이 성립하므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore \sin a=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4 직선 $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=1$에서

$y=0$일 때, $x=4 \qquad \therefore A(4,\ 0)$

$x=0$일 때, $y=-6 \qquad \therefore B(0,\ -6)$

즉, $\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=6$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

$\sin A=\dfrac{6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos A=\dfrac{4}{2\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\therefore \sin A+\cos A=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}+\dfrac{2\sqrt{13}}{13}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

5 $\triangle ABC$에서 $\sin x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{9}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{4}$

$3\overline{AC}=36 \qquad \therefore \overline{AC}=12$

$\triangle ABC$와 $\triangle EDC$에서

$\angle B=\angle D=90^\circ$, $\angle ACB=\angle ECD$(맞꼭지각)

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle EDC$(AA 닮음)

즉, $\overline{AC}:\overline{EC}=\overline{BC}:\overline{DC}$이므로

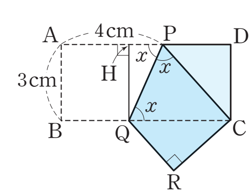
$12:6=9:\overline{DC}$, $12\overline{DC}=54 \qquad \therefore \overline{DC}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore \overline{ED}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

따라서 $\triangle EAD$에서 $\overline{AD}=12+\dfrac{9}{2}=\dfrac{33}{2}$이므로

$\tan y=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{AD}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\div\dfrac{33}{2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\times\dfrac{2}{33}=\dfrac{\sqrt{7}}{11}$

6 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



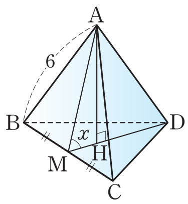
$\angle CPQ=\angle APQ$(접은 각)이고

$\angle APQ=\angle PQC$(엇각)이므로

$\triangle PQC$는 이등변삼각형이다.

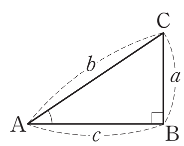
즉, △QRC에서
$\overline{QC}=\overline{PC}=\overline{PA}=4\,\text{cm}$, $\overline{CR}=\overline{AB}=3\,\text{cm}$이므로
$\overline{BQ}=\overline{QR}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}\,(\text{cm})$
따라서 △HQP에서
$\overline{HP}=\overline{AP}-\overline{AH}=\overline{AP}-\overline{BQ}=4-\sqrt{7}\,(\text{cm})$이므로
$\tan x=\dfrac{\overline{HQ}}{\overline{HP}}=\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$

7 오른쪽 그림에서 △ABC는 정삼각형이므로



$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$
점 A에서 $\overline{MD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 6=2\sqrt{6}$
따라서 △AMH에서 $\sin x=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AM}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

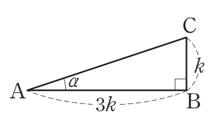
8 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서



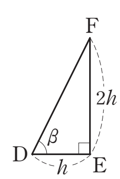
$\sin A:\cos A=2:3$이므로
$\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{b}=2:3 \qquad \therefore\ a:c=2:3$
$a=2k,\ c=3k\,(k>0)$라 하면
$b=\sqrt{(2k)^2+(3k)^2}=\sqrt{13}k$
$\therefore\ \sin A\times\tan A=\dfrac{2k}{\sqrt{13}k}\times\dfrac{2k}{3k}=\dfrac{4}{3\sqrt{13}}=\dfrac{4\sqrt{13}}{39}$

9 $3x^2-7x+2=0$에서 $(3x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=2$
이때 $0^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$이므로 $\tan\alpha<\tan\beta$
$\therefore\ \tan\alpha=\dfrac{1}{3},\ \tan\beta=2$

$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같은

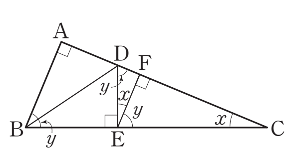


직각삼각형 ABC에서
$\overline{AB}=3k,\ \overline{BC}=k\,(k>0)$라 하면
$\overline{AC}=\sqrt{(3k)^2+k^2}=\sqrt{10}k$이므로
$\sin\alpha=\dfrac{k}{\sqrt{10}k}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$
$\tan\beta=2$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형



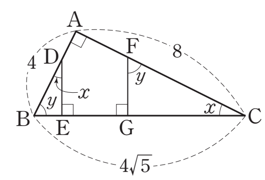
DEF에서 $\overline{DE}=h,\ \overline{EF}=2h\,(h>0)$라 하면
$\overline{DF}=\sqrt{h^2+(2h)^2}=\sqrt{5}h$이므로
$\cos\beta=\dfrac{h}{\sqrt{5}h}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
$\therefore\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\div\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10 오른쪽 그림에서



△ABC∽△EDC∽△FEC
∽△FDE(AA 닮음)
이므로 $\angle C=\angle x$, $\angle B=\angle y$
라 하면
① △ABC에서 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\tan x$
② △ABD에서 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\tan(\angle DBA)$
③ △FEC에서 $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{CF}}=\tan x$
④ △EDC에서 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{CE}}=\tan x$
⑤ △FDE에서 $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{EF}}=\tan x$
따라서 그 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

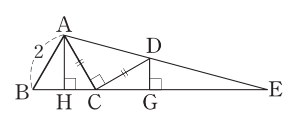
11 오른쪽 그림과 같은 △ABC에서



$\overline{BC}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$
△ABC∽△EBD(AA 닮음)
이므로 $\angle ACB=\angle EDB=\angle x$
또 △ABC∽△GFC(AA 닮음)
이므로 $\angle ABC=\angle GFC=\angle y$
따라서 △ABC에서
$\cos x=\dfrac{8}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos y=\dfrac{4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로
$\cos x+\cos y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

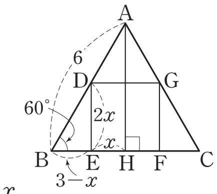
12 삼각형의 세 내각의 크기의 비가 $1:2:3$이므로
$\angle A=180^\circ\times\dfrac{2}{1+2+3}=60^\circ$
$\therefore$ (주어진 식)$=\left(\dfrac{1}{2}-\sin 60^\circ\right)(1+\tan 60^\circ)-\cos 60^\circ$
$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\sqrt{3})-\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})-\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{1}{2}\times(-2)-\dfrac{1}{2}=-1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$

13 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D



에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하면
△ABC에서 $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$
△DCG에서
$\angle DCG=180^\circ-(\angle ACH+\angle ACD)$
$=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$
이고 $\overline{CD}=\overline{AC}=\overline{AB}=2$이므로
$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{DG}}{2}$, $\overline{DG}=2\times\dfrac{1}{2}=1$
또 △ACD에서 $\angle DAC=45^\circ$이므로
$\cos 45^\circ=\dfrac{2}{\overline{AD}}$, $\overline{AD}=2\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$
$\overline{DE}=x$라 하면 △EAH∽△EDG(AA 닮음)이므로
$\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{AH}:\overline{DG}$에서 $(2\sqrt{2}+x):x=\sqrt{3}:1$,
$2\sqrt{2}+x=\sqrt{3}x$, $(\sqrt{3}-1)x=2\sqrt{2}$
$\therefore\ x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

14 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6=3$

이때 $\overline{EH}=x$라 하면

$\overline{DE}=2\overline{EH}=2x$, $\overline{BE}=\overline{BH}-\overline{EH}=3-x$

$\triangle DBE$에서 $\tan60^\circ=\frac{2x}{3-x}=\sqrt{3}$

$2x=\sqrt{3}(3-x)$, $(2+\sqrt{3})x=3\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\frac{3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=6\sqrt{3}-9$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는

$2x=2(6\sqrt{3}-9)=12\sqrt{3}-18$

15 $\angle DGF=90^\circ$, $\angle DFG=45^\circ$이므로 $\triangle DFG$는 $\overline{DG}=\overline{FG}=4\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이다.

$\triangle DGH$에서

$\sin30^\circ=\frac{\overline{DH}}{4\sqrt{2}}$, $\overline{DH}=4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$

$\cos30^\circ=\frac{\overline{GH}}{4\sqrt{2}}$, $\overline{GH}=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$

$\therefore$ (직육면체의 부피)$=4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}$

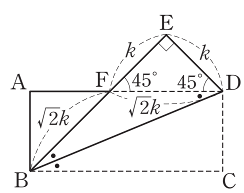
$=32\sqrt{6}$

16 $\angle FBD=\angle DBC$(접은 각), $\angle DBC=\angle FDB$(엇각)이므로 $\triangle FBD$는 $\overline{FB}=\overline{FD}$인 이등변삼각형이다.

$\angle FBD+\angle FDB=\angle EFD=45^\circ$이므로

$\angle FBD=\angle FDB=\frac{1}{2}\times45^\circ=22.5^\circ$

오른쪽 그림에서 $\triangle DEF$는 $\angle DEF=90^\circ$이고 $\overline{EF}=\overline{ED}$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EF}=\overline{ED}=k\,(k>0)$라 하면



$\sin45^\circ=\frac{k}{\overline{FD}}$,

$\overline{FD}=k\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}k$

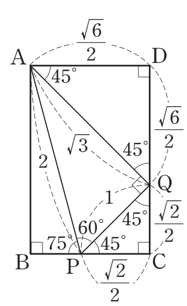
$\therefore\ \overline{FB}=\overline{FD}=\sqrt{2}k$

따라서 $\triangle BDE$에서

$\angle BDE=\angle FDB+\angle EDF=22.5^\circ+45^\circ=67.5^\circ$이므로

$\tan67.5^\circ=\frac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\frac{\sqrt{2}k+k}{k}=\frac{(\sqrt{2}+1)k}{k}=\sqrt{2}+1$

17 오른쪽 그림의 $\triangle APQ$에서



$\sin60^\circ=\frac{\overline{AQ}}{2}$, $\overline{AQ}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\cos60^\circ=\frac{\overline{PQ}}{2}$, $\overline{PQ}=2\times\frac{1}{2}=1$

$\triangle AQD$에서 $\cos45^\circ=\frac{\overline{AD}}{\sqrt{3}}$,

$\overline{DQ}=\overline{AD}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

이때 $\angle AQD=45^\circ$, $\angle AQP=90^\circ$이므로

$\angle PQC=180^\circ-(45^\circ+90^\circ)=45^\circ$

$\triangle QPC$에서 $\cos45^\circ=\frac{\overline{QC}}{1}$이므로

$\overline{PC}=\overline{QC}=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle ABP$에서 $\angle APB=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

$\therefore\ \tan75^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{DQ}+\overline{QC}}{\overline{BC}-\overline{PC}}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\div\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$

18 $\triangle COD$에서 $\overline{CO}=\overline{AO}=\frac{1}{2}\times12=6\,(\text{cm})$

$\angle COD=180^\circ-150^\circ=30^\circ$이므로

$\sin30^\circ=\frac{\overline{CD}}{6}$, $\overline{CD}=6\times\frac{1}{2}=3\,(\text{cm})$

$\cos30^\circ=\frac{\overline{OD}}{6}$, $\overline{OD}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle CAD$에서

$\tan x=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{3}{6+3\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

19 $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QB}$이므로

$\angle AOP=\angle POQ=\angle QOB=\frac{1}{3}\times90^\circ=30^\circ$

$\triangle POR$에서

$\sin60^\circ=\frac{\overline{PR}}{12}$, $\overline{PR}=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

$\cos60^\circ=\frac{\overline{OR}}{12}$, $\overline{OR}=12\times\frac{1}{2}=6$

같은 방법으로 $\triangle QOS$에서

$\overline{QS}=6$, $\overline{OS}=6\sqrt{3}$

$\triangle TOR$에서 $\tan30^\circ=\frac{\overline{TR}}{6}$, $\overline{TR}=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

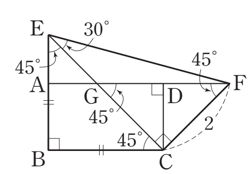
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=$(사분원 AOB의 넓이)$-\triangle POR-\triangle QOS+\triangle TOR$

$=\frac{1}{4}\times\pi\times12^2-\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times6+\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}$

$=36\pi-30\sqrt{3}$

20 오른쪽 그림의 $\triangle ECF$에서



$\tan30^\circ=\frac{2}{\overline{EC}}$,

$\overline{EC}=2\times\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

이때 $\overline{BC}=\overline{BE}$이므로 $\angle BCE=\angle BEC=45^\circ$

$\triangle EBC$에서

$\sin45^\circ=\frac{\overline{EB}}{2\sqrt{3}}$, $\overline{EB}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$

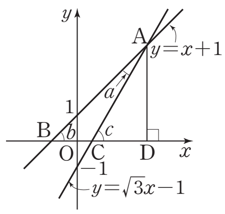
$\overline{AF}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle FGC=\angle BCG$(엇각)$=45^\circ$

$\triangle GCF$에서 $\angle CFG=90^\circ-\angle FGC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\triangle$CFD에서 $\sin 45^\circ = \dfrac{\overline{DC}}{2}$, $\overline{DC} = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB} = \overline{DC} = \sqrt{2}$이므로 $\overline{AE} = \overline{EB} - \overline{AB} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

21 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x+1$, $y=\sqrt{3}x-1$이 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하고 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\angle ABO = \angle b$, $\angle ACD = \angle c$라 하면

$\triangle$ABD에서 직선 $y=x+1$의 기울기가 1이므로

$\tan b = 1$ $\quad \therefore \angle b = 45^\circ$

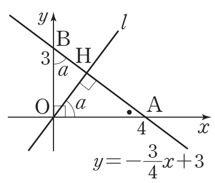
$\triangle$ACD에서 $y=\sqrt{3}x-1$의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로

$\tan c = \sqrt{3}$ $\quad \therefore \angle c = 60^\circ$

따라서 $\triangle$ABC에서

$\angle a + 45^\circ = 60^\circ$ $\quad \therefore \angle a = 15^\circ$

22 오른쪽 그림과 같이 직선 $y = -\dfrac{3}{4}x + 3$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 A, B, 직선 l과 만나는 점을 H라 하고, 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\angle a$라 하자.



$y = -\dfrac{3}{4}x + 3$에서

$y=0$일 때, $x=4$ $\quad \therefore$ A$(4, 0)$

$x=0$일 때, $y=3$ $\quad \therefore$ B$(0, 3)$

이때 $\triangle ABO \backsim \triangle AOH$(AA 닮음)이므로

$\angle ABO = \angle AOH = \angle a$

$\therefore \tan a = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{4}{3}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이고, 원점을 지나므로 직선 l의 방정식은 $y = \dfrac{4}{3}x$이다.

23 $\overline{OC} = \overline{OA} = 1$이고 $\tan 45^\circ = \overline{CD} = 1$

$\sin 45^\circ = \dfrac{\overline{AB}}{1}$, $\overline{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{\overline{OB}}{1}$, $\overline{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이) $= \triangle DOC - \triangle AOB$

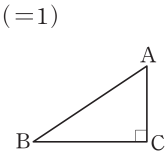
$= \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

24 $\cos 0^\circ = \sin 90^\circ = 1$이고

$\sin A$는 $0^\circ \le A \le 90^\circ$일 때, $\angle A$의 크기가 커질수록 그 값이 0에서 1까지 커지므로

$\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 40^\circ < \sin 65^\circ < \sin 90^\circ \ (=1)$

이때 오른쪽 그림과 같이 $\angle C = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서



$\sin A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\cos B = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

즉, $\angle A + \angle B = 90^\circ$이면 $\sin A = \cos B$이므로

$\underbrace{\sin 10^\circ}_{ㄱ} < \underbrace{\cos 70^\circ}_{ㄹ} < \underbrace{\cos 50^\circ}_{ㄷ} < \underbrace{\sin 65^\circ}_{ㅂ} < \underbrace{\cos 0^\circ}_{ㄴ} \ (=1)$

또 $\tan A$는 $0^\circ \le A < 90^\circ$일 때, $\angle A$의 크기가 커질수록 그 값이 0에서 한없이 커지므로

$\tan 45^\circ < \tan 50^\circ$ $\quad \therefore 1 < \underbrace{\tan 50^\circ}_{ㅁ}$

따라서 보기의 삼각비의 값을 작은 것부터 순서대로 나열하면

ㄱ-ㄹ-ㄷ-ㅂ-ㄴ-ㅁ

참고 삼각비의 대소 관계

(1) $0^\circ \le \angle x < 45^\circ$일 때, $\sin x < \cos x$

(2) $\angle x = 45^\circ$일 때, $\sin x = \cos x < \tan x$

(3) $45^\circ < \angle x \le 90^\circ$일 때, $\cos x < \sin x < \tan x$

25 (주어진 식) $= \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + \sqrt{(1-\cos x)^2} - \sqrt{(\tan x - 1)^2}$

이고, $0^\circ < \angle x < 45^\circ$일 때

$\sin x < \cos x < 1$, $\tan x < 1$이므로

$\sin x - \cos x < 0$, $1 - \cos x > 0$, $\tan x - 1 < 0$

$\therefore$ (주어진 식)

$= -(\sin x - \cos x) + (1 - \cos x) - \{-(\tan x - 1)\}$

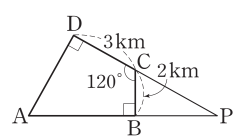
$= -\sin x + \cos x + 1 - \cos x + \tan x - 1$

$= \tan x - \sin x$

$= \overline{CD} - \overline{AB}$

$= \overline{CD} - \overline{ED} = \overline{CE}$

26 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 $\overline{DC}$의 연장선의 교점을 P라 하면



$\triangle$CBP에서

$\angle BCP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$\angle BPC = 30^\circ$이므로

$\cos 60^\circ = \dfrac{2}{\overline{CP}}$, $\overline{CP} = 2 \times 2 = 4\ (\text{km})$

$\tan 60^\circ = \dfrac{\overline{BP}}{2}$, $\overline{BP} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ (\text{km})$

또 $\triangle$APD에서

$\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{7}$, $\overline{AD} = 7 \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}\ (\text{km})$

$\cos 30^\circ = \dfrac{7}{\overline{AP}}$, $\overline{AP} = 7 \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}\ (\text{km})$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = \dfrac{14\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\ (\text{km})$

$\therefore$ (공원의 둘레의 길이) $= \dfrac{8\sqrt{3}}{3} + 2 + 3 + \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

$= 5\sqrt{3} + 5\ (\text{km})$

따라서 선미의 속력은 시속 5 km, 지영이의 속력은 시속 6 km이므로

(공원을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간의 차)

$= \dfrac{5\sqrt{3}+5}{5} - \dfrac{5\sqrt{3}+5}{6} = \dfrac{5\sqrt{3}+5}{30} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$ (시간)

27 $x^2 - 4x + 2 = 0$에서 $x = 2 \pm \sqrt{2}$이므로

$\sin \dfrac{A}{2} = 2 + \sqrt{2}$ 또는 $\sin \dfrac{A}{2} = 2 - \sqrt{2}$

이때 △ABC는 예각삼각형이므로 $0^\circ<\angle A<90^\circ$에서

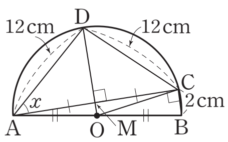
$0^\circ<\dfrac{\angle A}{2}<45^\circ$

즉, $0<\sin\dfrac{A}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sin\dfrac{A}{2}=2-\sqrt{2}$

따라서 △ABC에서 $\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$이므로

$$\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$$
$$=2-\sqrt{2}$$

28 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 그으면 □AOCD에서 $\overline{AD}=\overline{CD}$, $\overline{AO}=\overline{CO}$이므로 $\overline{AC}\perp\overline{DO}$이다.



이때 $\overline{AC}$, $\overline{DO}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{AM}=\overline{CM}$이므로 △ABC에서 삼각형의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times2=1\,(\text{cm})$

이때 반원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\overline{DM}=(r-1)$ cm이고

△DAM에서 $\overline{AM}^2=\overline{AD}^2-\overline{DM}^2=12^2-(r-1)^2$

△OAM에서 $\overline{AM}^2=\overline{OA}^2-\overline{OM}^2=r^2-1^2$이므로

$12^2-(r-1)^2=r^2-1^2$, $r^2-r-72=0$, $(r+8)(r-9)=0$

$\therefore r=9\,(\because r>0)$

따라서 $\overline{AM}=\sqrt{9^2-1^2}=4\sqrt{5}\,(\text{cm})$, $\overline{DM}=9-1=8\,(\text{cm})$이므로

$\tan x=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{AM}}=\dfrac{8}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 60~61

01 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ **02** $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ **03** $\dfrac{50}{27}$

04 ③ **05** $\sqrt{3}+1$ **06** $18\sqrt{3}\pi$ cm **07** $\dfrac{1}{\sin x+1}$

08 ㄹ, ㅂ

01 길잡이 △ABC∽△BCD임을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구해 본다.

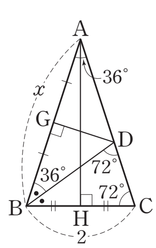
$\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\angle B=\angle C=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

$\overline{BD}$가 ∠B의 이등분선이므로

$\angle ABD=\angle DBC=\dfrac{1}{2}\angle B=\dfrac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$

△ABD에서 $\angle BDC=\angle DAB+\angle DBA=36^\circ+36^\circ=72^\circ$

오른쪽 그림에서 △DAB와 △BCD가 이등변삼각형이므로 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{BC}=2$



△ABC∽△BCD (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$에서

$x:2=2:(x-2)$, $x^2-2x-4=0$

$\therefore x=1+\sqrt{5}\,(\because x>0)$

이때 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABH에서

$\angle BAH=\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{1}{2}\times36^\circ=18^\circ$,

$\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times2=1$

$\therefore \sin18^\circ=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

또 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 G라 하면 △DAB에서

$\overline{AG}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{5})=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

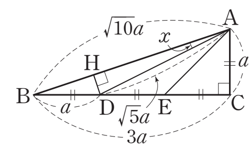
따라서 △DAG에서

$\cos36^\circ=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\div2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

02 길잡이 보조선을 그어 $\angle x$를 한 내각으로 하는 직각삼각형을 만들어 본다.

오른쪽 그림과 같이

$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=\overline{AC}=a$라 하면



△ADC에서

$\overline{AD}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$

△ABC에서

$\overline{AB}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

이때 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

△ABC∽△DBH (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BH}$에서

$\sqrt{10}a:a=3a:\overline{BH}$, $\sqrt{10}a\times\overline{BH}=3a^2$ $\therefore \overline{BH}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}a$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{10}a-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}a=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}a$

따라서 △AHD에서

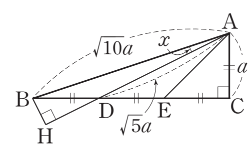
$\cos x=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AD}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}a\div\sqrt{5}a=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}a\times\dfrac{1}{\sqrt{5}a}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

다른 풀이 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=\overline{AC}=a$라 하면

△ADC에서 $\overline{AD}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$

△ABC에서 $\overline{AB}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ADC∽△BDH (AA 닮음)이므로



$\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{DC}:\overline{DH}$에서

$\sqrt{5}a:a=2a:\overline{DH}$, $\sqrt{5}a\times\overline{DH}=2a^2$

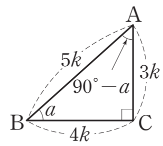
$\therefore \overline{DH}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

따라서 △ABH에서

$$\cos x=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\left(\sqrt{5}a+\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)\div\sqrt{10}a$$
$$=\frac{7\sqrt{5}}{5}a\times\frac{1}{\sqrt{10}a}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

03 길잡이 $\sin a=\dfrac{3}{5}$을 만족하는 직각삼각형 ABC를 그린 다음 $\cos a$, $\tan(90^\circ-a)$의 값을 구해 본다.

$\sin a = \frac{3}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5k$, $\overline{AC}=3k\,(k>0)$라 하면



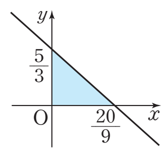
$\overline{BC}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$

$\therefore \cos a = \frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$

이때 $\angle BAC = 90^\circ - \angle a$이므로

$\tan(90^\circ - a)=\frac{4k}{3k}=\frac{4}{3}$

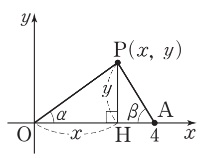
오른쪽 그림에서 직선 $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{4}{3}$의 x절편은 $\frac{20}{9}$, y절편은 $\frac{5}{3}$이므로



$(구하는 넓이)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{9}\times\frac{5}{3}=\frac{50}{27}$

04 길잡이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$를 x, y를 이용하여 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{OH}=x$, $\overline{PH}=y\,(0<x<4,\ y>0)$라 하면



$\triangle POH$에서 $\tan\alpha=\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}=\frac{y}{x}$

$\triangle PHA$에서 $\tan\beta=\frac{\overline{PH}}{\overline{HA}}=\frac{y}{4-x}$

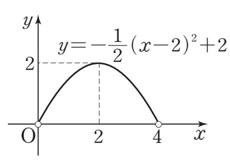
이때 $\tan\alpha+\tan\beta=2$이므로

$\frac{y}{x}+\frac{y}{4-x}=2$이고 $0<x<4$이므로

$(4-x)y+xy=2x(4-x)$, $4y=-2x^2+8x$

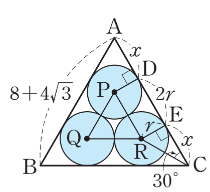
$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\,(0<x<4)$

따라서 점 P가 그리는 선의 모양은 오른쪽 그림과 같은 이차함수 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$의 그래프와 같다.



05 길잡이 원의 중심에서 삼각형의 변에 수선의 발을 내린 다음, 반지름의 길이와 변의 길이 사이의 관계식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 세 원의 중심을 각각 P, Q, R라 하고 두 점 P, R에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. 이때 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로



$\angle RCE=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

이때 $\overline{CE}=\overline{AD}=x$라 하고, 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle CER$에서

$\tan 30^\circ=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore x=\sqrt{3}r$ $\quad\cdots$ ㉠

$\overline{AC}=8+4\sqrt{3}$이므로 $2x+2r=8+4\sqrt{3}$ $\quad\cdots$ ㉡

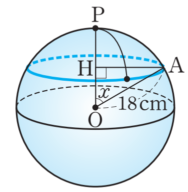
㉠을 ㉡에 대입하면 $2(\sqrt{3}+1)r=8+4\sqrt{3}$

$\therefore r=\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}+1$이다.

06 길잡이 실의 나머지 한 끝점을 A라 할 때, $\overline{OP}$와 $\overline{OA}$가 이루는 각의 크기를 구해 본다.

오른쪽 그림과 같이 실의 나머지 한 끝이 지나는 점을 A라 하고 점 A에서 $\overline{PO}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\angle POA=\angle x$라 하면 $\overset{\frown}{PA}=6\pi$ cm이고

$2\pi\times18\times\frac{x}{360}=6\pi$이므로 $\angle x=60^\circ$

$\triangle AHO$에서

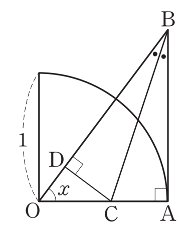
$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{18}$, $\overline{AH}=18\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$ (cm)

따라서 실의 나머지 한 끝이 지나간 자리의 길이는 $\overline{AH}$를 반지름으로 하는 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\times9\sqrt{3}=18\sqrt{3}\pi$ (cm)

07 길잡이 점 C에서 $\overline{BO}$에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\triangle BDC\equiv\triangle BAC$(RHA 합동)임을 이용하여 $\overline{OC}$의 길이를 삼각비로 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BO}$에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\overline{OC}=a$라 하면



$\triangle BDC\equiv\triangle BAC$(RHA 합동)이므로

$\overline{CD}=\overline{CA}=1-a$

따라서 $\triangle OCD$에서

$\sin x=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\frac{1-a}{a}$, $a(\sin x+1)=1$

$\therefore \overline{OC}=a=\frac{1}{\sin x+1}$

08 길잡이 $\overline{AC}$가 사분원의 접선이므로 $\angle OAC=90^\circ$임을 이용한다.

$\triangle AOB$에서

$\sin a=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$ (⇦ ㄱ)

$\cos a=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB}}{1}=\overline{OB}$

$\overline{AC}$가 사분원의 접선이므로 $\angle OAC=90^\circ$

$\triangle AOC$에서

$\tan a=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AC}}{1}=\overline{AC}$ (⇦ ㄴ)

$\cos a=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{1}{\overline{OC}}$ $\quad\therefore \overline{OC}=\frac{1}{\cos a}$ (⇦ ㄷ)

$\therefore \overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}=\frac{1}{\cos a}-\cos a$ (⇦ ㅂ)

$\triangle DOC$에서 $\tan a=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$

$\therefore \overline{CD}=\overline{OC}\times\tan a=\frac{1}{\cos a}\times\tan a=\frac{\tan a}{\cos a}$ (⇦ ㄹ)

또 $\triangle DOC$에서 $\overline{OD}\perp\overline{AC}$이므로

$\overline{AC}^2=\overline{AO}\times\overline{AD}$, $\tan^2 a=1\times\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=\tan^2 a$ (⇦ ㅁ)

따라서 옳지 않은 것은 ㄹ, ㅂ이다.

참고 삼각비의 제곱의 표현

$(\sin a)^2=\sin^2 a$, $(\cos a)^2=\cos^2 a$, $(\tan a)^2=\tan^2 a$로 나타낸다.

2 삼각비의 활용

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 62~63

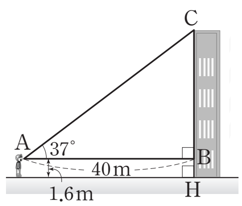
1 ②, ③	**2** 31.6 m	**3** ①	**4** $5\sqrt{6}$	**5** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	**6** $7\sqrt{3}$
7 $32\sqrt{2}$	**8** 12 cm^2	**9** $30\sqrt{2}$			

1 ② $\cos 35^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{x}{7}$이므로 $x=7\cos 35^\circ$

③ $\angle A=180^\circ-(35^\circ+90^\circ)=55^\circ$이고

$\sin 55^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{x}{7}$이므로 $x=7\sin 55^\circ$

2 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서



$\overline{BC}=40\tan 37^\circ$

$=40\times 0.75=30\,(\text{m})$

∴ (건물의 높이)

$=\overline{CH}=\overline{BC}+\overline{BH}$

$=30+1.6=31.6\,(\text{m})$

3 $\triangle ABH$에서 $\angle BAH=180^\circ-(50^\circ+90^\circ)=40^\circ$이므로

$\overline{BH}=\overline{AH}\tan 40^\circ$

$\triangle AHC$에서 $\angle CAH=180^\circ-(90^\circ+65^\circ)=25^\circ$이므로

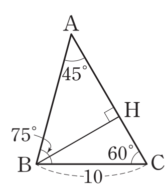
$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 25^\circ$

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{AH}\tan 40^\circ+\overline{AH}\tan 25^\circ=6$

즉, $\overline{AH}(\tan 40^\circ+\tan 25^\circ)=6$이므로

$\overline{AH}=\frac{6}{\tan 40^\circ+\tan 25^\circ}$

4 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABC$에서 $\angle A=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

$\triangle BCH$에서

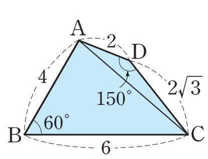
$\overline{BH}=10\sin 60^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

따라서 $\triangle ABH$에서 $\overline{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=5\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=5\sqrt{6}$

5 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 8\times\sin 45^\circ=10$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10,\ 2\sqrt{2}\times\overline{AB}=10$ $\quad\therefore\ \overline{AB}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

6 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면



$\square ABCD$

$=\triangle ABC+\triangle ACD$

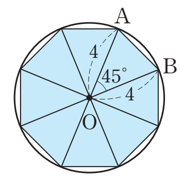
$=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times\sin 60^\circ$

$+\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$

$=6\sqrt{3}+\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

7 정팔각형은 오른쪽 그림과 같이 합동인 8개의 이등변삼각형으로 나눌 수 있으므로 $\triangle AOB$에서



$\overline{OA}=\overline{OB}=4,\ \angle AOB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$

∴ (정팔각형의 넓이)

$=8\triangle AOB$

$=8\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin 45^\circ\right)$

$=8\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=32\sqrt{2}$

8 $\square ABCD$가 평행사변형이므로 $\overline{AD}=\overline{BC}=8\,\text{cm}$

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로

$\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\square ABCD\right)$

$=\frac{1}{4}\square ABCD$

$=\frac{1}{4}\times(8\times 4\sqrt{3}\times\sin 60^\circ)$

$=\frac{1}{4}\times\left(8\times 4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=12\,(\text{cm}^2)$

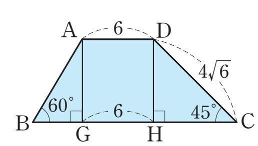
9 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times 12\times 10\times\sin(180^\circ-135^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 12\times 10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{2}$

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 64~68

1 $32\sqrt{3}+24$	**2** $10\sqrt{3}$ m	**3** ④	**4** 0.5 km
5 분속 69.2 m	**6** $4\sqrt{3}$ cm^2	**7** ⑤	**8** $8(\sqrt{3}-1)$
9 $4\sqrt{43}$ km	**10** 24 cm^2	**11** $\left(\frac{125}{3}\pi-25\right)\text{cm}^2$	
12 ②	**13** $21\sqrt{3}$ cm^2	**14** $\frac{18\sqrt{3}}{5}$	**15** ④
16 21	**17** $\frac{7\sqrt{3}}{4}$	**18** $\frac{10\sqrt{3}+21}{2}$	**19** $32-\frac{32\sqrt{3}}{3}$
20 ⑤	**21** 1 cm	**22** ③	**23** ②
24 9	**25** $\frac{4096\sqrt{3}}{243}$ cm		
26 $225(5+2\sqrt{3})$		**27** $P>Q$	

1 오른쪽 그림과 같이 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 $\overline{GH}=\overline{AD}=6$



$\triangle DHC$에서

$\overline{DH}=4\sqrt{6}\sin 45^\circ=4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{3}$

$\overline{HC}=4\sqrt{6}\cos 45^\circ=4\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{3}$

$\triangle$ABG에서 $\overline{BG}=\dfrac{\overline{AG}}{\tan 60^\circ}=\dfrac{\overline{DH}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4$

$\therefore \square ABCD=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{DH}$

$=\dfrac{1}{2}\times\{6+(4+6+4\sqrt{3})\}\times 4\sqrt{3}$

$=32\sqrt{3}+24$

2 $\triangle$BDH에서

$\overline{DH}=2\sqrt{3}\sin 30^\circ=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$

$\overline{BH}=2\sqrt{3}\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\ (\mathrm{m})$

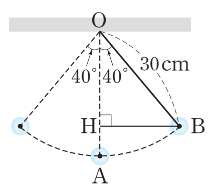
$\triangle$ACH에서

$\overline{AH}=\overline{AB}+\overline{BH}=8+3=11\ (\mathrm{m})$

$\overline{CH}=\overline{AH}\times\tan 60^\circ=11\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$

$\therefore\ \overline{CD}=\overline{CH}-\overline{DH}=11\sqrt{3}-\sqrt{3}=10\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$

3 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$OHB에서



$\overline{OH}=\overline{OB}\cos 40^\circ=30\cos 40^\circ\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=30-30\cos 40^\circ$

$=30(1-\cos 40^\circ)\ (\mathrm{cm})$

4 $\overline{CH}=h\,\mathrm{km}$라 하면

$\triangle$CAH에서 $\angle ACH=180^\circ-(45^\circ+90^\circ)=45^\circ$이므로

$\overline{AH}=\overline{CH}\tan 45^\circ=h\ (\mathrm{km})$

$\triangle$CHB에서 $\angle BCH=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$이므로

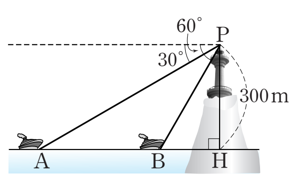
$\overline{BH}=\overline{CH}\tan 60^\circ=\sqrt{3}h\ (\mathrm{km})$

$\triangle$HAB에서 $\overline{AH}^2+\overline{BH}^2=\overline{AB}^2$이므로

$h^2+(\sqrt{3}h)^2=1^2,\ 4h^2=1,\ h^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ h=\dfrac{1}{2}=0.5\ (\mathrm{km})(\because\ h>0)$

5 오른쪽 그림의 $\triangle$PBH에서



$\angle BPH=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

이므로

$\overline{BH}=300\tan 30^\circ$

$=300\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=100\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$

$\triangle$PAH에서

$\angle APH=90^\circ-30^\circ=60^\circ$이므로

$\overline{AH}=300\tan 60^\circ=300\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$

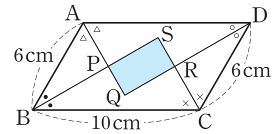
$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AH}-\overline{BH}$

$=300\sqrt{3}-100\sqrt{3}=200\sqrt{3}$

$=200\times 1.73=346\ (\mathrm{m})$

따라서 346 m를 5분 동안 이동하였으므로 배의 속력은 분속 69.2 m이다.

6 오른쪽 그림에서



$\angle A:\angle B=2:1$이므로

$\angle A=\dfrac{2}{2+1}\times 180^\circ=120^\circ$

$\angle B=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$\therefore\ \angle C=\angle A=120^\circ,\ \angle D=\angle B=60^\circ$

$\triangle$ABP에서 $\angle PAB=\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$

$\angle PBA=\dfrac{1}{2}\angle B=\dfrac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

$\therefore\ \angle APB=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

같은 방법으로 $\angle BSC=\angle CRD=\angle AQD=90^\circ$이므로

$\square$PQRS는 직사각형이다.

$\triangle$BCS에서 $\overline{BS}=\overline{BC}\cos 30^\circ=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$

$\triangle$ABP에서 $\overline{BP}=\overline{AB}\cos 30^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \overline{PS}=\overline{BS}-\overline{BP}=5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$

$\triangle$BCS에서 $\overline{CS}=\overline{BC}\sin 30^\circ=10\times\dfrac{1}{2}=5\ (\mathrm{cm})$

$\triangle$CDR에서 $\overline{CR}=\overline{DC}\sin 30^\circ=6\times\dfrac{1}{2}=3\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \overline{SR}=\overline{CS}-\overline{CR}=5-3=2\ (\mathrm{cm})$

$\therefore\ \square PQRS=\overline{PS}\times\overline{SR}=2\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

7 $\triangle$CAH에서

$\tan 20^\circ=\dfrac{h}{\overline{AH}},\ \overline{AH}=\dfrac{h}{\tan 20^\circ}\ (\mathrm{m})$

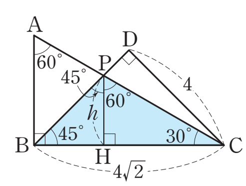
$\triangle$CBH에서

$\tan 50^\circ=\dfrac{h}{\overline{BH}},\ \overline{BH}=\dfrac{h}{\tan 50^\circ}\ (\mathrm{m})$

이때 $\overline{AH}-\overline{BH}=18\ (\mathrm{m})$이므로

$\dfrac{h}{\tan 20^\circ}-\dfrac{h}{\tan 50^\circ}=18$에서 $h\left(\dfrac{1}{\tan 20^\circ}-\dfrac{1}{\tan 50^\circ}\right)=18$

8 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,



$\overline{PH}=h$라 하면

$\triangle$PBH에서 $\angle BPH=45^\circ$이므로

$\overline{BH}=h\tan 45^\circ=h$

$\triangle$PHC에서 $\angle CPH=60^\circ$이므로

$\overline{CH}=h\tan 60^\circ=\sqrt{3}h$

이때 $\triangle$DBC에서 $\overline{BC}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=4\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$이고

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$이므로 $h+\sqrt{3}h=4\sqrt{2}$

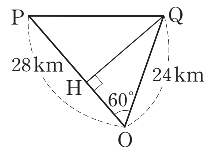
$(\sqrt{3}+1)h=4\sqrt{2}\qquad\therefore\ h=2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$\therefore\ \triangle PBC=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=8(\sqrt{3}-1)$

9 두 자동차가 각각 시속 84 km, 72 km로 20분 동안 이동하였으므로

$\overline{OP}=84\times\dfrac{20}{60}=28\ (\mathrm{km}),\ \overline{OQ}=72\times\dfrac{20}{60}=24\ (\mathrm{km})$

오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\overline{OQ}\cos 60^\circ=24\times\frac{1}{2}=12\,(\text{km})$

$\overline{QH}=\overline{OQ}\sin 60^\circ=24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}\,(\text{km})$

$\overline{PH}=\overline{OP}-\overline{OH}=28-12=16\,(\text{km})$

따라서 $\triangle PHQ$에서

$\overline{PQ}=\sqrt{16^2+(12\sqrt{3})^2}=4\sqrt{43}\,(\text{km})$

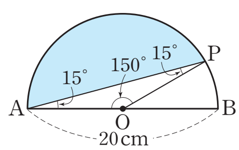
10 점 P는 두 중선의 교점이므로 $\triangle ABC$의 무게중심이다.

$\therefore \triangle APC=\frac{1}{3}\triangle ABC$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 12\times 8\sqrt{3}\times\sin 60^\circ\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 12\times 8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=24\,(\text{cm}^2)$

11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$를 그으면



$\overline{OA}=\overline{OP}=\frac{1}{2}\times 20=10\,(\text{cm})$

이므로 $\triangle AOP$는 이등변삼각형이다.

즉, $\angle OPA=\angle OAP=15^\circ$

$\therefore \angle AOP=180^\circ-2\times 15^\circ=150^\circ$

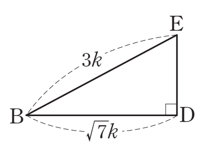
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=$(부채꼴 AOP의 넓이)$-\triangle AOP$

$=\pi\times 10^2\times\frac{150}{360}-\frac{1}{2}\times 10\times 10\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=\frac{125}{3}\pi-25\,(\text{cm}^2)$

12 $\cos B=\frac{\sqrt{7}}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 BDE에서 $\overline{BD}=\sqrt{7}k$, $\overline{BE}=3k\,(k>0)$라 하면



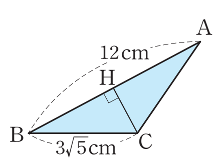
$\overline{DE}=\sqrt{(3k)^2-(\sqrt{7}k)^2}=\sqrt{2}k$이므로

$\sin B=\frac{\sqrt{2}k}{3k}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{5}\times\sin B$

$=\frac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{10}\,(\text{cm}^2)$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle BCH$에서



$\overline{BH}=3\sqrt{5}\cos B=3\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{7}}{3}$

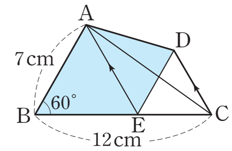
$=\sqrt{35}\,(\text{cm})$

$\overline{CH}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(\sqrt{35})^2}=\sqrt{10}\,(\text{cm})$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\times 12\times\sqrt{10}=6\sqrt{10}\,(\text{cm}^2)$

13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면



$\overline{AE}/\!/\overline{DC}$이므로 $\triangle AED=\triangle AEC$

$\therefore \square ABED$

$=\triangle ABE+\triangle AED$

$=\triangle ABE+\triangle AEC$

$=\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 12\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=21\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

14 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로

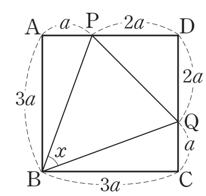
$\frac{1}{2}\times 9\times 6\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 9\times\overline{AD}\times\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times 6\times\sin 30^\circ$

$\frac{1}{2}\times 9\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 9\times\overline{AD}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times 6\times\frac{1}{2}$

$\frac{15}{4}\overline{AD}=\frac{27\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore \overline{AD}=\frac{18\sqrt{3}}{5}$

15 오른쪽 그림에서 $\overline{AP}:\overline{PD}=1:2$, $\overline{CQ}:\overline{QD}=1:2$이므로



$\overline{AP}=\overline{CQ}=a\,(a>0)$라 하면

$\overline{PD}=\overline{QD}=2a$, $\overline{AB}=\overline{BC}=3a$

$\therefore \overline{PB}=\overline{QB}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

$\overline{PQ}$를 그으면

$\square ABCD=\triangle ABP+\triangle BCQ+\triangle PQD+\triangle PBQ$

$=2\triangle ABP+\triangle PQD+\triangle PBQ$

이므로

$(3a)^2=2\times\left(\frac{1}{2}\times a\times 3a\right)+\frac{1}{2}\times 2a\times 2a$

$+\frac{1}{2}\times\sqrt{10}a\times\sqrt{10}a\times\sin x$

$9a^2=3a^2+2a^2+5a^2\sin x,\ 5a^2\sin x=4a^2\qquad\therefore \sin x=\frac{4}{5}$

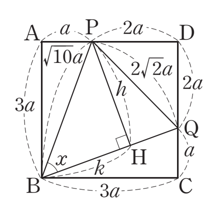
다른 풀이 $\overline{AP}:\overline{PD}=1:2$, $\overline{CQ}:\overline{QD}=1:2$이므로

$\overline{AP}=\overline{CQ}=a\,(a>0)$라 하면

$\overline{PD}=\overline{QD}=2a$, $\overline{AB}=\overline{BC}=3a$

$\therefore \overline{PB}=\overline{QB}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BH}=k$, $\overline{PH}=h$라 하면



$\triangle PBQ$에서

$h^2=(\sqrt{10}a)^2-k^2$

$=(2\sqrt{2}a)^2-(\sqrt{10}a-k)^2$

이므로 $10a^2-k^2=8a^2-10a^2+2\sqrt{10}ak-k^2$

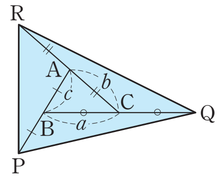
$2\sqrt{10}ak=12a^2\qquad\therefore k=\frac{3\sqrt{10}}{5}a$

$\therefore h=\sqrt{(\sqrt{10}a)^2-k^2}=\sqrt{(\sqrt{10}a)^2-\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}a\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}a$

따라서 $\triangle PBH$에서

$\sin x=\frac{h}{\overline{PB}}=\frac{4\sqrt{10}a}{5}\div\sqrt{10}a=\frac{4\sqrt{10}a}{5}\times\frac{1}{\sqrt{10}a}=\frac{4}{5}$

16 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서



$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면

$\overline{BQ}=2a$, $\overline{CR}=2b$, $\overline{AP}=2c$

$\triangle ARP$

$=\frac{1}{2}\times b\times 2c\times \sin(180^\circ-\angle RAP)$

$=\frac{1}{2}\times b\times 2c\times \sin A=2\times\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)$

$=2\triangle ABC$

$=2\times 3=6$

같은 방법으로

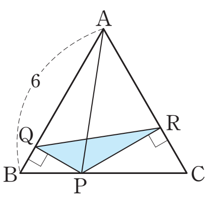
$\triangle BPQ=2\times\left(\frac{1}{2}ac\sin B\right)=2\triangle ABC=2\times 3=6$

$\triangle CQR=2\times\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right)=2\triangle ABC=2\times 3=6$

$\therefore\ \triangle PQR=\triangle ABC+\triangle ARP+\triangle BPQ+\triangle CQR$

$=3+6+6+6=21$

17 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$를 그으면



$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=\frac{1}{2}\times 6\times\overline{PQ}+\frac{1}{2}\times 6\times\overline{PR}$

$9\sqrt{3}=3(\overline{PQ}+\overline{PR})$

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{PR}=3\sqrt{3}$

$(\overline{PQ}+\overline{PR})^2=\overline{PQ}^2+\overline{PR}^2+2\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$에서

$(3\sqrt{3})^2=13+2\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$

$\therefore\ \overline{PQ}\times\overline{PR}=7$

따라서 $\triangle QBP$에서 $\angle QBP=60^\circ$이므로

$\angle QPB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

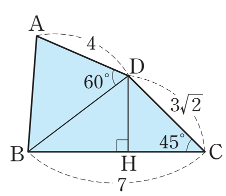
같은 방법으로 $\triangle RPC$에서 $\angle RPC=30^\circ$이므로

$\angle QPR=180^\circ-2\times 30^\circ=120^\circ$

$\therefore\ \triangle QPR=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 7\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

18 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle DHC$에서

$\overline{CH}=3\sqrt{2}\cos 45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

$\overline{DH}=3\sqrt{2}\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

$\therefore\ \overline{BH}=\overline{BC}-\overline{CH}=7-3=4$

$\triangle DBH$에서 $\overline{DB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

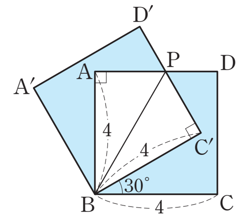
$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABD+\triangle DBC$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DH}$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times 7\times 3$

$=5\sqrt{3}+\frac{21}{2}=\frac{10\sqrt{3}+21}{2}$

19 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$와 $\overline{C'D'}$의 교점을 P라 하고, $\overline{BP}$를 그으면



$\triangle ABP\equiv\triangle C'BP$ (RHS 합동)이므로

$\angle PBC'=\frac{1}{2}\angle ABC'$

$=\frac{1}{2}\times(90^\circ-30^\circ)=30^\circ$

$\triangle PBC'$에서

$\overline{PC'}=\overline{BC'}\tan 30^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

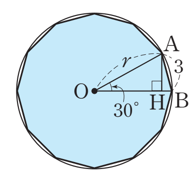
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=2\times(\square ABCD-2\triangle PBC')$

$=2\times\left\{4^2-2\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

$=2\times\left(16-\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$

$=32-\frac{32\sqrt{3}}{3}$

20 오른쪽 그림과 같이 정십이각형의 외접원의 중심을 O, 이웃하는 두 꼭짓점을 A, B라 하고, $\overline{OA}=\overline{OB}=r$라 하자. 점 A에서 $\overline{OB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle AOH$에서

$\overline{OH}=r\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}r$, $\overline{AH}=r\sin 30^\circ=\frac{1}{2}r$

$\triangle AHB$에서 $\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=r-\frac{\sqrt{3}}{2}r$이므로

$3^2=\left(\frac{1}{2}r\right)^2+\left(r-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2$

$(2-\sqrt{3})r^2=9\qquad\therefore\ r^2=9(2+\sqrt{3})$

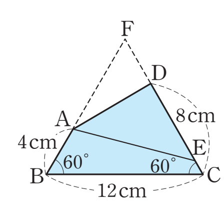
$\therefore$ (정십이각형의 넓이)$=12\triangle AOB$

$=12\times\left(\frac{1}{2}\times r\times r\times\sin 30^\circ\right)$

$=3r^2$

$=3\times 9(2+\sqrt{3})=27(2+\sqrt{3})$

21 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 F라 하면 $\angle AFD=60^\circ$이므로 $\triangle FBC$는 정삼각형이다.



이때 $\overline{AF}=12-4=8\,(\text{cm})$,

$\overline{FD}=12-8=4\,(\text{cm})$이므로

$\square ABCD=\triangle FBC-\triangle FAD$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12^2-\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\sin 60^\circ$

$=36\sqrt{3}-8\sqrt{3}=28\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

$\overline{CE}=x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{DE}=(8-x)\,\text{cm}$이고

$\triangle AED=\triangle FAE-\triangle FAD$이므로

$\triangle AED=\frac{1}{2}\times 8\times(12-x)\times\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\sin 60^\circ$

$=2\sqrt{3}(8-x)\,(\text{cm}^2)$

$\square ABCD=2\triangle AED$이므로

$28\sqrt{3}=2\times 2\sqrt{3}(8-x)$, $7=8-x\qquad\therefore\ x=1$

따라서 $\overline{CE}=1\,\text{cm}$이다.

22 $\triangle AMN$

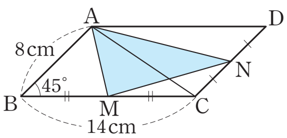
$=\square ABCD-\triangle ABM-\triangle MCN-\triangle AND$

$=8\times 14\times \sin 45^\circ-\dfrac{1}{2}\times 8\times 7\times \sin 45^\circ$

$\quad -\dfrac{1}{2}\times 7\times 4\times \sin(180^\circ-135^\circ)-\dfrac{1}{2}\times 4\times 14\times \sin 45^\circ$

$=56\sqrt{2}-14\sqrt{2}-7\sqrt{2}-14\sqrt{2}=21\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면



$\triangle AMN$

$=\triangle AMC+\triangle ACN-\triangle MCN$

$=\dfrac{1}{2}\triangle ABC+\dfrac{1}{2}\triangle ACD-\triangle MCN$

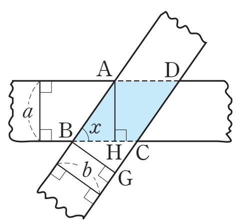
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\square ABCD+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\square ABCD-\triangle MCN$

$=\dfrac{1}{2}\square ABCD-\triangle MCN$

$=\dfrac{1}{2}\times(8\times 14\times \sin 45^\circ)-\dfrac{1}{2}\times 7\times 4\times \sin(180^\circ-135^\circ)$

$=28\sqrt{2}-7\sqrt{2}=21\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$

23 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 B에서 $\overline{CD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 G라 하면



$\overline{AH}=a$, $\overline{BG}=b$이므로

$\triangle ABH$에서 $\overline{AB}=\dfrac{\overline{AH}}{\sin x}=\dfrac{a}{\sin x}$

$\angle BCG=\angle x$(엇각)이므로

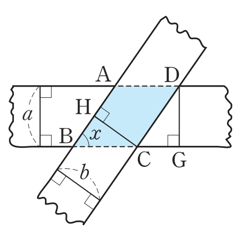
$\triangle BGC$에서 $\overline{BC}=\dfrac{\overline{BG}}{\sin x}=\dfrac{b}{\sin x}$

$\therefore\ \square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin x$

$\qquad=\dfrac{a}{\sin x}\times\dfrac{b}{\sin x}\times\sin x$

$\qquad=\dfrac{ab}{\sin x}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 D에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 G라 하면



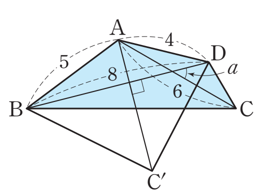
$\overline{DG}=a$, $\overline{CH}=b$

$\triangle BCH$에서

$\overline{BC}=\dfrac{\overline{CH}}{\sin x}=\dfrac{b}{\sin x}$

$\therefore\ \square ABCD=\overline{BC}\times\overline{DG}=\dfrac{b}{\sin x}\times a=\dfrac{ab}{\sin x}$

24 오른쪽 그림과 같이 $\square ABCD$의 두 대각선 AC, BD가 이루는 각의 크기를 $\angle a$라 하면



$\square ABCD=\dfrac{1}{2}\times 6\times 8\times \sin a$이므로 $\square ABCD$의 넓이가 최대가 되는 경우는 $\sin a$의 값이 최대일 때이다.

그런데 $\sin a$의 값은 $\angle a=90^\circ$일 때 1로 최대가 되므로 꼭짓점 C가 점 C′의 위치에 있을 때, 즉 $\overline{AC'}\perp\overline{BD}$일 때 $\square ABCD$의 넓이는 최대가 된다.

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{C'D}^2=\overline{BC'}^2+\overline{AD}^2$에서

$5^2+\overline{C'D}^2=\overline{BC'}^2+4^2$

$\therefore\ \overline{BC'}^2-\overline{C'D}^2=\overline{BC}^2-\overline{CD}^2=9$

25 $\triangle OAB$에서 $\angle BOA=\angle x$라 하면

$\overline{OA}:\overline{AB}=3\sqrt{3}:3=\sqrt{3}:1$에서

$\tan x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\angle x=30^\circ$

즉, $\angle BOA=\angle COB=\angle DOC=\cdots=30^\circ$이므로 빗변이 $\overline{OA}$와 겹치는 직각삼각형은 A_{12}이다.

이때 직각삼각형 A_1에서

$\overline{OB}=\dfrac{\overline{OA}}{\cos 30^\circ}=\overline{OA}\times\dfrac{1}{\cos 30^\circ}\,(\text{cm})$

직각삼각형 A_2에서

$\overline{OC}=\dfrac{\overline{OB}}{\cos 30^\circ}=\overline{OB}\times\dfrac{1}{\cos 30^\circ}=\overline{OA}\times\left(\dfrac{1}{\cos 30^\circ}\right)^2(\text{cm})$

직각삼각형 A_3에서

$\overline{OD}=\dfrac{\overline{OC}}{\cos 30^\circ}=\overline{OC}\times\dfrac{1}{\cos 30^\circ}=\overline{OA}\times\left(\dfrac{1}{\cos 30^\circ}\right)^3(\text{cm})$

$\vdots$

따라서 직각삼각형 A_{12}의 빗변의 길이는

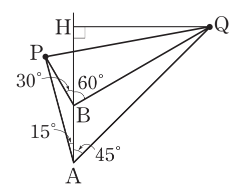
$\overline{OA}\times\left(\dfrac{1}{\cos 30^\circ}\right)^{12}(\text{cm})$이므로

(구하는 빗변의 길이)$=\overline{OA}\times\left(\dfrac{1}{\cos 30^\circ}\right)^{12}$

$\qquad=3\sqrt{3}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{12}$

$\qquad=3\sqrt{3}\times\dfrac{4096}{729}=\dfrac{4096\sqrt{3}}{243}\,(\text{cm})$

26 오른쪽 그림과 같이 $\triangle PAB$에서



$\angle PBA=180^\circ-30^\circ=150^\circ$이므로

$\angle APB=180^\circ-(150^\circ+15^\circ)=15^\circ$

이때 자동차가 시속 90 km의 속력으로 A지점에서 B지점까지 10분 동안 이동하였으므로 $\overline{AB}=90\times\dfrac{10}{60}=15\,(\text{km})$

따라서 $\triangle PAB$는 $\overline{AB}=\overline{PB}=15\,\text{km}$인 이등변삼각형이다.

이때 점 Q에서 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}=x\,\text{km}$라 하면 $\triangle BQH$에서

$\overline{BQ}=\dfrac{x}{\cos 60^\circ}=2x\,(\text{km})$, $\overline{HQ}=x\tan 60^\circ=\sqrt{3}x\,(\text{km})$

$\triangle AQH$에서 $\tan 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}x}{15+x}$, $1=\dfrac{\sqrt{3}x}{15+x}$

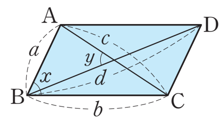
$(\sqrt{3}-1)x=15\qquad\therefore\ x=\dfrac{15(\sqrt{3}+1)}{2}$

$\therefore\ \overline{BQ}=2x=15(\sqrt{3}+1)\,(\text{km})$

따라서 $\triangle PBQ$에서 $\angle PBQ=90^\circ$이므로

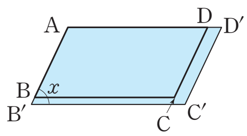
$\overline{PQ}^2=15^2+\{15(\sqrt{3}+1)\}^2=225(5+2\sqrt{3})$

27 오른쪽 그림과 같이 □ABCD에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{AC}=c$, $\overline{BD}=d$라 하고 a, b가 이루는 각의 크기를 $\angle x$, c, d가 이루는 예각의 크기를 $\angle y$라 하면



$S=ab\sin x=\frac{1}{2}cd\sin y$

(i) 오른쪽 그림과 같이 □ABCD의 네 변의 길이를 모두 10 %씩 늘려서 만든 사각형을 □AB′C′D′이라 하면

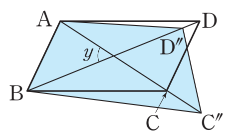


$P=1.1a\times1.1b\times\sin x$

$=1.21ab\sin x$

$=1.21S$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 □ABCD에서 $\overline{AC}$의 길이를 30 % 늘리고, $\overline{BD}$의 길이를 10 % 줄여서 만든 사각형을 □ABC″D″이라 하면



$Q=\frac{1}{2}\times1.3c\times0.9d\times\sin y$

$=\frac{1}{2}cd\sin y\times1.17$

$=1.17S$

따라서 (i), (ii)에서 $P>Q$이다.

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 69~70

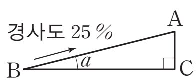
01 643.9 m **02** $\frac{4}{3}$ **03** $(4\sqrt{3}+3)$ m **04** $25\sqrt{6}$ m

05 $24+8\sqrt{3}$ **06** (1) $\frac{4\sqrt{19}}{19}\le\sin x\le1$ (2) $48\sqrt{3}\le ab\le12\sqrt{57}$

07 24 **08** $(4-2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$

01 길잡이 $\tan a$의 값을 먼저 구한 후, $\angle a$를 한 내각으로 하는 직각삼각형에서 변의 길이를 구한다.

오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\angle a$라 하면



(경사도)$=\tan a\times100=25$ (%)이므로

$\tan a=\frac{1}{4}$

이때 $\overline{AC}=k$ m, $\overline{BC}=4k$ m $(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(4k)^2+k^2}=\sqrt{17}k$ (m)

$\overline{AB}=1$ km$=1000$ m이므로

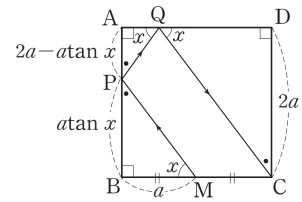
$\overline{AC}=1000\sin a=1000\times\frac{k}{\sqrt{17}k}=\frac{1000}{\sqrt{17}}=\frac{1000}{4.1}$

$=243.90\cdots$ (m)

따라서 $400+243.90\cdots=643.90\cdots$이므로 자동차의 현재 위치를 반올림하여 소수점 아래 첫째 자리까지 구하면 643.9 m이다.

02 길잡이 빛의 입사각의 크기와 반사각의 크기가 같음을 이용하여 서로 닮음인 직각삼각형을 찾아본다.

$\overline{BM}=a$라 하면



$\overline{AB}=\overline{BC}=2a$, $\overline{PB}=a\tan x$, $\overline{PA}=2a-a\tan x$

오른쪽 그림에서

$\triangle PBM\backsim\triangle PAQ$ (AA 닮음)

이므로

$\overline{BM}:\overline{AQ}=\overline{PB}:\overline{PA}$에서

$a:\overline{AQ}=a\tan x:(2a-a\tan x)$

$\therefore\ \overline{AQ}=\frac{2a}{\tan x}-a$,

$\overline{DQ}=\overline{AD}-\overline{AQ}=2a-\left(\frac{2a}{\tan x}-a\right)=\left(3-\frac{2}{\tan x}\right)a$

또 $\triangle PBM\backsim\triangle CDQ$ (AA 닮음)이므로

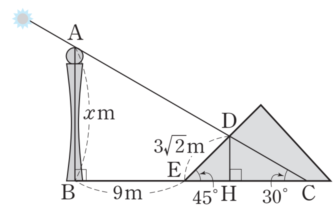
$\overline{BM}:\overline{DQ}=\overline{PB}:\overline{CD}$에서

$a:\left(3-\frac{2}{\tan x}\right)a=a\tan x:2a$

즉, $1:\left(3-\frac{2}{\tan x}\right)=\tan x:2$이므로

$3\tan x-2=2\qquad\therefore\ \tan x=\frac{4}{3}$

03 길잡이 건축물이 없을 때의 조형물의 그림자의 길이를 생각해 본다.



위의 그림의 △DEH에서

$\overline{EH}=3\sqrt{2}\cos45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$ (m)

$\overline{DH}=3\sqrt{2}\sin45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$ (m)

△DHC에서

$\overline{HC}=\frac{\overline{DH}}{\tan30^\circ}=3\div\frac{\sqrt{3}}{3}=3\times\frac{3}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ (m)

따라서 △ABC에서

$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EH}+\overline{HC}=9+3+3\sqrt{3}=12+3\sqrt{3}$ (m)이므로

$x=\overline{BC}\tan30^\circ=(12+3\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}+3$

04 길잡이 $\overline{PH}=h$ m라 할 때, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$를 h를 이용하여 나타내어 본다.

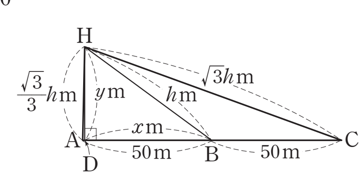
$\overline{PH}=h$ m라 하면

△PAH에서 $\overline{AH}=\frac{h}{\tan60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}h$ (m)

△PHB에서 $\overline{BH}=\frac{h}{\tan45^\circ}=h$ (m)

△PHC에서 $\overline{CH}=\frac{h}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}h$ (m)

오른쪽 그림과 같이 △HAC의 점 H에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D라 하고,



$\overline{BD}=x$ m, $\overline{HD}=y$ m라 하면

△HAD에서 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2=(50-x)^2+y^2$ ⋯ ㉠

△HDC에서 $(\sqrt{3}h)^2=(50+x)^2+y^2$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면 $\frac{10}{3}h^2=5000+2(x^2+y^2)$

이때 △HDB에서 $x^2+y^2=h^2$이므로

$\frac{10}{3}h^2=5000+2h^2$, $h^2=3750$ $\quad\therefore h=25\sqrt{6}\,(\because h>0)$

따라서 산의 높이는 $\overline{PH}=25\sqrt{6}$ m이다.

05 길잡이 삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점임을 이용하여 ∠CAD의 크기를 구한다.

△ABC의 내심 I는 세 내각의 이등분선의 교점이므로

$\angle CAD=\angle BAD=30^\circ$

△ABC에서 $\angle ABC=180^\circ-(30^\circ+30^\circ+45^\circ)=75^\circ$

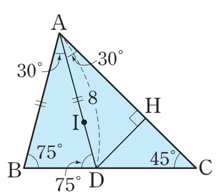
이때 △ABD에서

$\angle ADB=180^\circ-(30^\circ+75^\circ)=75^\circ$

이므로 △ABD는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}=8$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



△ADH에서

$\overline{AH}=8\cos 30^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\overline{DH}=8\sin 30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$

△DCH에서 $\overline{CH}=\frac{\overline{DH}}{\tan 45^\circ}=\frac{4}{1}=4$

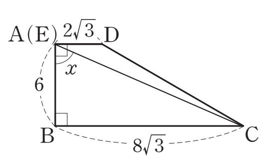
$\therefore \overline{AC}=\overline{AH}+\overline{CH}=4\sqrt{3}+4$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 8\times(4\sqrt{3}+4)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24+8\sqrt{3}$

06 길잡이 점 E가 두 점 A, D 위에 있을 때를 각각 나누어서 생각해 본다.

(1) (i) 오른쪽 그림과 같이 점 E가 점 A 위에 있을 때

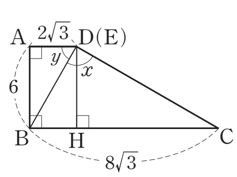


△ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+(8\sqrt{3})^2}=2\sqrt{57}$

$\therefore \sin x=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{57}}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 점 E가 점 D 위에 있을 때



점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle ADB=\angle y$라 하면 △ABD에서

$\tan y=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$이므로

$\angle y=60^\circ$이고 $\angle BDH=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

$\angle CDH=\angle x-30^\circ$

△DHC에서

$\tan(x-30^\circ)=\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}=\frac{8\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$이므로

$\angle x-30^\circ=60^\circ$ $\quad\therefore \angle x=90^\circ$ $\quad\therefore \sin x=1$

따라서 (i), (ii)에서 점 E가 점 A에서 점 D로 움직일수록 ∠x의 크기는 커지므로 $\frac{4\sqrt{19}}{19}\le\sin x\le 1$

(2) $\triangle EBC=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin x=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{3}\times 6$이므로

$\sin x=\frac{48\sqrt{3}}{ab}$

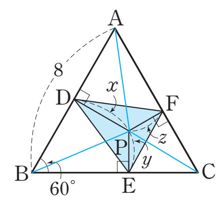
(1)에서 $\frac{4\sqrt{19}}{19}\le\sin x\le 1$이므로

$\frac{4\sqrt{19}}{19}\le\frac{48\sqrt{3}}{ab}\le 1$, $\frac{\sqrt{57}}{684}\le\frac{1}{ab}\le\frac{1}{48\sqrt{3}}$

$\therefore 48\sqrt{3}\le ab\le 12\sqrt{57}$

07 길잡이 △ABC와 △DEF의 넓이를 이용하여 $\overline{PD}$, $\overline{PE}$, $\overline{PF}$에 관한 식을 세운다.

오른쪽 그림에서



$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

이므로

$\overline{PD}=x$, $\overline{PE}=y$, $\overline{PF}=z$라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=\frac{1}{2}\times 8\times x+\frac{1}{2}\times 8\times y$

$+\frac{1}{2}\times 8\times z$

$4(x+y+z)=16\sqrt{3}$

$\therefore x+y+z=4\sqrt{3}$ ⋯ ㉠

□DBEP에서 $\angle DBE=60^\circ$, $\angle BDP=\angle BEP=90^\circ$이므로

$\angle DPE=360^\circ-(60^\circ+90^\circ+90^\circ)=120^\circ$

같은 방법으로 $\angle EPF=\angle FPD=120^\circ$

이때 $\triangle DEF=\triangle PDE+\triangle PEF+\triangle PFD$이므로

$3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$+\frac{1}{2}\times y\times z\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$+\frac{1}{2}\times z\times x\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)=3\sqrt{3}$

$\therefore xy+yz+zx=12$ ⋯ ㉡

$\therefore \overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2=x^2+y^2+z^2$

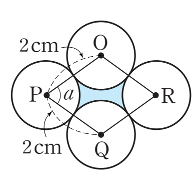
$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=(4\sqrt{3})^2-2\times 12$ (∵ ㉠, ㉡)

$=24$

08 길잡이 $\angle OPQ=\angle a$라 할 때, ∠a의 크기가 변함에 따라 색칠한 부분의 넓이가 어떻게 변하는지 생각해 본다.

오른쪽 그림에서 $\overline{PO}=\overline{QR}$, $\overline{PQ}=\overline{OR}$이므로 □OPQR는 평행사변형이다.



이때

(색칠한 부분의 넓이)

=□OPQR−(4개의 부채꼴의 넓이의 합)

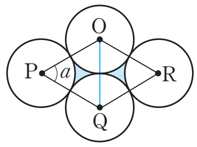
그런데 □OPQR의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로 4개의 부채꼴의 넓이의 합은 반지름의 길이가 1 cm인 원의 넓이와 같다.

$\angle OPQ=\angle a$라 하면

(색칠한 부분의 넓이)$=2\times2\times\sin a-\pi\times1^2$

$=4\sin a-\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

(i) 오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이가 최소일 때는 $\sin a$의 값이 최소일 때이므로 $\angle a$의 크기가 최소가 되어야 한다.



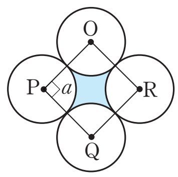
이때 △OPQ가 정삼각형이므로

$\angle a=60^\circ$

따라서 색칠한 부분의 넓이의 최솟값은

$4\sin a-\pi=4\sin 60^\circ-\pi=2\sqrt{3}-\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이가 최대일 때는 $\sin a$의 값이 최대일 때이므로 $\angle a=90^\circ$일 때이다.



따라서 색칠한 부분의 넓이의 최댓값은

$4\sin a-\pi=4\sin 90^\circ-\pi=4-\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

즉, (i), (ii)에서 색칠한 부분의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차는

$(4-\pi)-(2\sqrt{3}-\pi)=4-2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

서술형 완성하기 P. 71~72

1 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **2** $\dfrac{100(3+\sqrt{3})}{3}$ m **3** $3\sqrt{3}$ **4** 13 **5** $8\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$

6 점 P가 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발의 위치에 있을 때 △AQR의 넓이가 최소가 된다.

7 풀이 참조

1 $\overline{AM}$, $\overline{DM}$은 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이이므로

$\overline{AM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$ ⋯ (i)

즉, △AMD는 이등변삼각형이고, 점 N이 밑변의 중점이므로 $\angle MNA=90^\circ$

$\overline{AN}=\overline{DN}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\times2=1$이므로

△AMN에서

$\overline{MN}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$ ⋯ (ii)

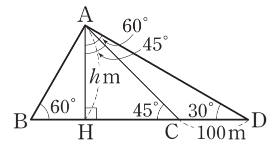
따라서 $\sin x=\dfrac{\overline{AN}}{\overline{AM}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ⋯ (iii)

$\tan y=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{DN}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$이므로 ⋯ (iv)

$\sin x\times\tan y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ⋯ (v)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AM}$, $\overline{DM}$의 길이 각각 구하기	각 10 %
(ii) $\overline{MN}$의 길이 구하기	30 %
(iii) $\sin x$의 값 구하기	20 %
(iv) $\tan y$의 값 구하기	20 %
(v) $\sin x\times\tan y$의 값 구하기	10 %

2 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,



$\overline{AH}=h$ m라 하면 △AHD에서

$\angle DAH=90^\circ-30^\circ=60^\circ$이므로

$\overline{DH}=h\tan 60^\circ=\sqrt{3}h$ (m)

△AHC에서 $\angle CAH=90^\circ-45^\circ=45^\circ$이므로

$\overline{CH}=h\tan 45^\circ=h$ (m)

$\overline{CD}=\overline{DH}-\overline{CH}$이므로 $100=\sqrt{3}h-h$ ⋯ (i)

$(\sqrt{3}-1)h=100$ $\therefore h=50(\sqrt{3}+1)$ ⋯ (ii)

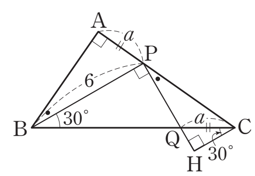
따라서 △ABH에서

$\overline{AB}=\dfrac{h}{\sin 60^\circ}=50(\sqrt{3}+1)\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{100(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}=\dfrac{100(3+\sqrt{3})}{3}$ (m) ⋯ (iii)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AH}$의 길이를 구하기 위한 식 세우기	30 %
(ii) $\overline{AH}$의 길이 구하기	30 %
(iii) $\overline{AB}$의 길이 구하기	40 %

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}=\overline{QC}=a$라 하고, 점 C에서 $\overline{PQ}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하자. ⋯ (i)



$\overline{BP}/\!/\overline{CH}$이므로

$\angle QCH=\angle QBP=30^\circ$ (엇각)

$\therefore \overline{CH}=\overline{QC}\cos 30^\circ=a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ ⋯ (ii)

△BPA와 △PCH에서

$\angle BAP=\angle PHC=90^\circ$

$\angle ABP=90^\circ-\angle APB=\angle HPC$

$\therefore$ △BPA ∽ △PCH (AA 닮음) ⋯ (iii)

따라서 $\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AP}:\overline{HC}$이므로

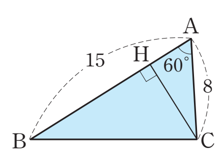
$6:\overline{PC}=a:\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=1:\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \overline{PC}=3\sqrt{3}$ ⋯ (iv)

채점 기준	배점
(i) 보조선을 그어 직각삼각형 만들기	20 %
(ii) $\overline{CH}$의 길이를 $\overline{AP}(=\overline{QC})$의 길이로 나타내기	30 %
(iii) △BPA ∽ △PCH임을 알기	30 %
(iv) $\overline{PC}$의 길이 구하기	20 %

4 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times15\times\overline{AC}\times\sin 60^\circ=30\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}\overline{AC}=30\sqrt{3}$ $\therefore \overline{AC}=8$ ⋯ (i)

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 ⋯ (ii)



△AHC에서

$\overline{AH}=8\cos 60^\circ=8\times\dfrac{1}{2}=4$ ⋯ (iii)

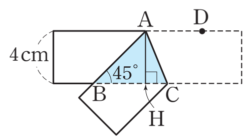
$\overline{CH}=8\sin 60^\circ=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ ⋯ (iv)

따라서 △BCH에서 $\overline{BH}=15-4=11$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{11^2+(4\sqrt{3})^2}=13$ ⋯ (v)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AC}$의 길이 구하기	30 %
(ii) 보조선 긋기	10 %
(iii) $\overline{AH}$의 길이 구하기	20 %
(iv) $\overline{CH}$의 길이 구하기	20 %
(v) $\overline{BC}$의 길이 구하기	20 %

5 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABH$에서 $\overline{AH}=4\,\text{cm}$이므로



$\overline{AB}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{2}\,(\text{cm})$ $\cdots$ (i)

또 $\angle DAC=\angle BAC$ (접은 각)이고 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle DAC=\angle BCA$ (엇각), 즉 $\angle BAC=\angle BCA$ $\cdots$ (ii)

따라서 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}=4\sqrt{2}\,\text{cm}$인 이등변삼각형이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}\times \sin 45^\circ=8\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$ $\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AB}$의 길이 구하기	30 %
(ii) $\angle BAC=\angle BCA$임을 설명하기	30 %
(iii) $\triangle ABC$의 넓이 구하기	40 %

6 $\triangle AQM\equiv\triangle APM$ (SAS 합동)

$\therefore$ $\overline{AQ}=\overline{AP}$, $\angle QAM=\angle PAM$ $\cdots$ ㉠

$\triangle ARN\equiv\triangle APN$ (SAS 합동)

$\therefore$ $\overline{AR}=\overline{AP}$, $\angle RAN=\angle PAN$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

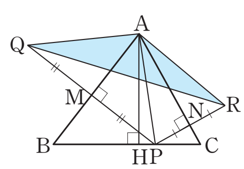
$\overline{AQ}=\overline{AR}=\overline{AP}$, $\angle QAR=2\angle BAC$ $\cdots$ (i)

$\therefore \triangle AQR=\dfrac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}\times\sin(\angle QAR)$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AP}\times\sin(2\angle BAC)$ $\cdots$ (ii)

이때 $\angle BAC$의 크기는 점 P의 위치에 관계없이 일정하고 $\triangle AQR$의 넓이는 $\overline{AP}$의 길이에 따라 변하므로 $\triangle AQR$의 넓이가 최소가 되려면 $\overline{AP}$의 길이가 최소가 되어야 한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AP}\geq\overline{AH}$이므로 점 P가 점 H의 위치에 있을 때 $\triangle AQR$의 넓이는 최소가 된다. $\cdots$ (iii)



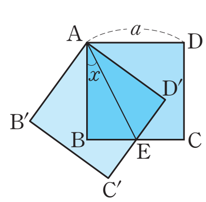
채점 기준	배점
(i) $\overline{AQ}=\overline{AR}=\overline{AP}$, $\angle QAR=2\angle BAC$임을 설명하기	30 %
(ii) $\triangle AQR$의 넓이를 식으로 나타내기	30 %
(iii) $\triangle AQR$의 넓이가 최소가 되는 점 P의 위치 구하기	40 %

7 |예시 답안|

오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라 하면

□ABCD$=a^2$이고 파란색 부분과 자홍색 부분의 넓이는 같으므로

(자홍색 부분의 넓이)$=\dfrac{a^2}{2}$ $\cdots$ (i)



$\overline{AE}$를 그으면 $\triangle ABE\equiv\triangle AD'E$ (RHS 합동)이므로

$\triangle ABE=\triangle AD'E=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}$

즉, $\dfrac{1}{2}\times a\times\overline{BE}=\dfrac{a^2}{4}$에서 $\overline{BE}=\dfrac{a}{2}$ $\cdots$ (ii)

따라서 $\triangle ABE$에서 $\angle BAE=\angle x$라 하면

$\tan x=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\dfrac{a}{2}\times\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}=0.5$이므로

$\angle x=27^\circ$ $\cdots$ (iii)

$\therefore \angle BAD'=2\angle BAE$

$=2\times 27^\circ=54^\circ$

따라서 자홍색 부분의 넓이를 빨간색, 파란색 부분의 넓이와 같게 하려면 빨간색 아크릴판을 시계 반대 방향으로 54°만큼 회전시키면 된다. $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) 자홍색 부분의 넓이 나타내기	20 %
(ii) $\overline{BE}$의 길이 구하기	30 %
(iii) $\angle x$의 크기 구하기	30 %
(iv) 아크릴판을 어떻게 회전시켜야 하는지 말하기	20 %

단원 마무리하기

P. 73~76

1 ② **2** $\dfrac{7}{25}$ **3** ② **4** ③ **5** $\dfrac{16\sqrt{41}}{205}$

6 $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ **7** ④ **8** $\dfrac{24}{25}$, 과정은 풀이 참조 **9** ②

10 $15(\sqrt{3}-1)\,\text{m}$ **11** $4\sqrt{7}$ **12** $10\sqrt{37}\,\text{m}$ **13** ②

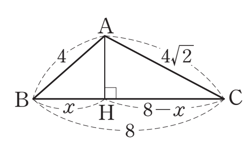
14 ② **15** 250초 **16** ② **17** $3\sqrt{3}\,\text{cm}$ **18** ⑤

19 ⑤ **20** ① **21** ③ **22** ③ **23** ③

24 $\dfrac{45\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$ **25** $9\sqrt{6}$, 과정은 풀이 참조

1 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\overline{BH}=x$라 하면 $\overline{CH}=8-x$



$\triangle ABH$에서 $\overline{AH}^2=4^2-x^2$이고

$\triangle AHC$에서 $\overline{AH}^2=(4\sqrt{2})^2-(8-x)^2$이므로

$4^2-x^2=(4\sqrt{2})^2-(8-x)^2$에서

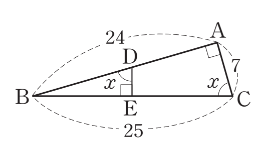
$16x=48$ $\quad\therefore x=3$

따라서 $\triangle ABH$에서 $\overline{AH}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로

$\tan B=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

2 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\sqrt{24^2+7^2}=25$



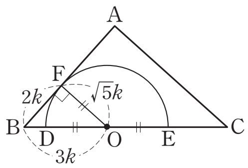
$\triangle ABC\backsim\triangle EBD$ (AA 닮음)이므로

$\angle ACB=\angle EDB=\angle x$

따라서 $\triangle ABC$에서 $\cos x=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{7}{25}$

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OF}$를 그으면

$\angle BFO=90^\circ$



$\triangle BOF$에서 $\cos B=\frac{2}{3}$이므로

$\overline{BO}=3k$, $\overline{BF}=2k\,(k>0)$라 하면

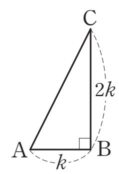
$\overline{OF}=\sqrt{(3k)^2-(2k)^2}=\sqrt{5}k$

따라서 $\overline{BE}=\overline{BO}+\overline{OE}=(3+\sqrt{5})k$,

$\overline{BD}=\overline{BO}-\overline{OD}=(3-\sqrt{5})k$이므로

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}=\frac{(3-\sqrt{5})k}{(3+\sqrt{5})k}=\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{4}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

4 $\tan A=2$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=k$, $\overline{BC}=2k\,(k>0)$라 하면



$\overline{AC}=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$이므로

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{k}{\sqrt{5}k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

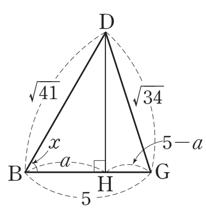
$$\therefore \frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\div\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{5}\times\frac{5}{\sqrt{5}}=3$$

5 $\triangle DBG$에서 $\overline{BG}=\sqrt{4^2+3^2}=5$,

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$, $\overline{DG}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BG}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}=a$라 하면 $\overline{HG}=5-a$



이때 $\triangle DBH$에서

$\overline{DH}^2=(\sqrt{41})^2-a^2$이고

$\triangle DHG$에서

$\overline{DH}^2=(\sqrt{34})^2-(5-a)^2$이므로

$(\sqrt{41})^2-a^2=(\sqrt{34})^2-(5-a)^2$

$10a=32 \qquad \therefore a=\frac{16}{5}$

따라서 $\triangle DBH$에서

$$\cos x=\frac{\overline{BH}}{\overline{BD}}=\frac{16}{5}\div\sqrt{41}=\frac{16}{5}\times\frac{1}{\sqrt{41}}=\frac{16\sqrt{41}}{205}$$

6 $\cos a=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB}}{8}=\frac{3}{4} \qquad \therefore \overline{OB}=6$

$\triangle AOB$에서 $\overline{AB}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$

이때 $\triangle AOB \backsim \triangle CAE$ (AA 닮음)이므로

$\overline{OB}:\overline{AE}=\overline{AB}:\overline{CE}$에서

$6:(8-6)=2\sqrt{7}:\overline{CE}$, $6\overline{CE}=4\sqrt{7} \qquad \therefore \overline{CE}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$$\therefore \triangle CAE=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{CE}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

7 ① (주어진 식)$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{2+\sqrt{3}}$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$$

② (주어진 식)$=0\times1-1\times\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

③ (주어진 식)$=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+1=\frac{\sqrt{3}}{6}+1$

④ (주어진 식)$=(0+\sqrt{3})\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}-1$

⑤ (주어진 식)$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

8 $0^\circ<A<45^\circ$일 때, $0<\sin A<\cos A$이므로

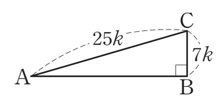
$\sin A+\cos A>0$, $\sin A-\cos A<0$

(주어진 식)$=(\sin A+\cos A)-\{-(\sin A-\cos A)\}$

$=2\sin A=\frac{14}{25}$ $\qquad\cdots$ (i)

$\therefore \sin A=\frac{7}{25}$ $\qquad\cdots$ (ii)

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=25k$, $\overline{BC}=7k\,(k>0)$라 하면



$\overline{AB}=\sqrt{(25k)^2-(7k)^2}=24k$

$\therefore \cos A=\frac{24k}{25k}=\frac{24}{25}$ $\qquad\cdots$ (iii)

채점 기준	배점
(i) 주어진 식을 간단히 하기	30 %
(ii) $\sin A$의 값 구하기	30 %
(iii) $\cos A$의 값 구하기	40 %

9 $\overline{AC}=\overline{AB}\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2\,(\text{m})$

$\overline{BC}=\overline{AB}\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,(\text{m})$

$\therefore$ (처음 나무의 높이)$=\overline{AC}+\overline{BC}$

$=2+2\sqrt{3}=2(1+\sqrt{3})\,(\text{m})$

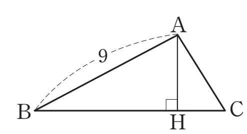
10 $\triangle ABC$에서 $\angle CAB=15^\circ+45^\circ=60^\circ$이므로

$\overline{BC}=\overline{AB}\tan 60^\circ=15\times\sqrt{3}=15\sqrt{3}\,(\text{m})$

$\triangle ABD$에서 $\overline{BD}=\overline{AB}\tan 45^\circ=15\times1=15\,(\text{m})$

$\therefore \overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=15\sqrt{3}-15=15(\sqrt{3}-1)\,(\text{m})$

11 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABH$에서

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin B=9\times\frac{\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BH}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{7}$

$\triangle AHC$에서 $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{5}$이므로

$\overline{AC}=5k$, $\overline{CH}=\sqrt{7}k\,(k>0)$라 하면

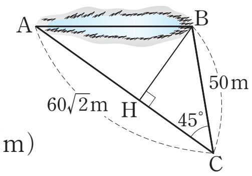
$(5k)^2=(\sqrt{7}k)^2+(3\sqrt{2})^2$, $18k^2=18$

$k^2=1 \qquad \therefore k=1\,(\because k>0)$

따라서 $\overline{CH}=\sqrt{7}k=\sqrt{7}$이므로

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}=3\sqrt{7}+\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

12 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
△BHC에서



$\overline{BH}=50\sin 45^\circ=50\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}\,(\text{m})$

$\overline{HC}=50\cos 45^\circ=50\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}\,(\text{m})$

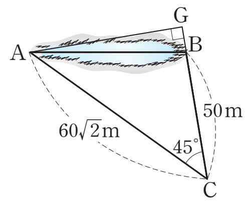
$\therefore\ \overline{AH}=\overline{AC}-\overline{HC}$

$\qquad=60\sqrt{2}-25\sqrt{2}=35\sqrt{2}\,(\text{m})$

따라서 △AHB에서

$\overline{AB}=\sqrt{(35\sqrt{2})^2+(25\sqrt{2})^2}=10\sqrt{37}\,(\text{m})$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 G라 하면 △ACG에서



$\overline{AG}=60\sqrt{2}\sin 45^\circ=60\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

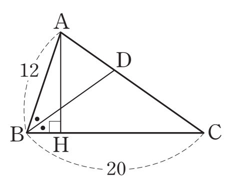
$\quad=60\,(\text{m})$

$\overline{CG}=60\sqrt{2}\cos 45^\circ=60\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=60\,(\text{m})$

$\therefore\ \overline{BG}=\overline{CG}-\overline{BC}=60-50=10\,(\text{m})$

따라서 △ABG에서 $\overline{AB}=\sqrt{60^2+10^2}=10\sqrt{37}\,(\text{m})$

13 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
△ABH에서



$\overline{BH}=\overline{AB}\cos B=12\times\frac{1}{3}=4$이므로

$\overline{AH}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$

△AHC에서 $\overline{CH}=\overline{BC}-\overline{BH}=20-4=16$이므로

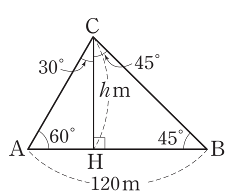
$\overline{AC}=\sqrt{16^2+(8\sqrt{2})^2}=8\sqrt{6}$

$\overline{BD}$가 ∠B의 이등분선이므로

$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}=12:20=3:5$

$\therefore\ \overline{AD}=\frac{3}{3+5}\times\overline{AC}=\frac{3}{8}\times 8\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

14 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,
$\overline{CH}=h$ m라 하면 △CAH에서
∠ACH$=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로



$\overline{AH}=\overline{CH}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}h\,(\text{m})$

△CHB에서 ∠BCH$=90^\circ-45^\circ=45^\circ$이므로

$\overline{BH}=\overline{CH}\tan 45^\circ=h\,(\text{m})$

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$이므로

$120=\frac{\sqrt{3}}{3}h+h,\ \frac{\sqrt{3}+3}{3}h=120$

$\therefore\ h=\frac{360}{3+\sqrt{3}}=60(3-\sqrt{3})\,(\text{m})$

따라서 열기구의 높이는 지면으로부터 $60(3-\sqrt{3})$ m이다.

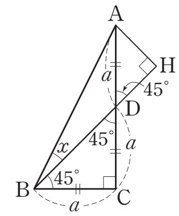
15 △ABC에서 ∠ABC$=10^\circ$ (엇각)이므로

$\overline{AB}=\frac{3400}{\sin 10^\circ}=\frac{3400}{0.17}=20000\,(\text{m})$

따라서 초속 80 m로 착륙하는 데 걸리는 시간은

$(\text{시간})=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}=\frac{20000}{80}=250\,(\text{초})$

16 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고,
$\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{BC}=a$라 하면



$\overline{BD}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

△BCD에서 $\overline{BC}=\overline{DC}$이므로

∠DBC$=$∠BDC$=45^\circ$

△ADH에서 ∠ADH$=$∠BDC$=45^\circ$이므로

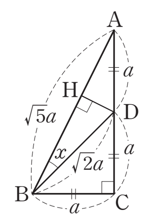
$\overline{AH}=\overline{AD}\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \overline{DH}=\overline{AD}\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

따라서 △ABH에서

$\tan x=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\div\left(\sqrt{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

$\quad=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{2}{3\sqrt{2}a}=\frac{1}{3}$

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{BC}=a$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$

$\overline{BD}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

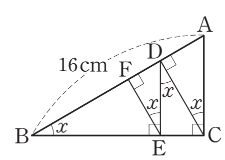
$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times a\times a=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}a\times\overline{DH}$

$\therefore\ \overline{DH}=\frac{1}{\sqrt{5}}a=\frac{\sqrt{5}}{5}a$

따라서 △BDH에서 $\overline{BH}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$이므로

$\tan x=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a\div\frac{3\sqrt{5}}{5}a=\frac{\sqrt{5}}{5}a\times\frac{5}{3\sqrt{5}a}=\frac{1}{3}$

17 $\sin(4x-75^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서



$0^\circ<4\angle x-75^\circ<90^\circ$이므로

$4\angle x-75^\circ=45^\circ,\ 4\angle x=120^\circ$

$\therefore\ \angle x=30^\circ$

△ABC∽△ACD∽△CDE∽△DEF (AA 닮음)이므로

∠ACD$=$∠CDE$=$∠DEF$=$∠ABC$=\angle x=30^\circ$

△ABC에서 $\overline{AC}=\overline{AB}\sin 30^\circ=16\times\frac{1}{2}=8\,(\text{cm})$

△ACD에서 $\overline{DC}=\overline{AC}\cos 30^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

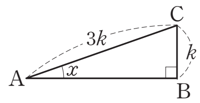
△CDE에서 $\overline{DE}=\overline{DC}\cos 30^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\,(\text{cm})$

△DEF에서 $\overline{EF}=\overline{DE}\cos 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

18 $ax-2y+3=0$에서 $y=\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}$

$\therefore\ (\text{직선의 기울기})=\frac{a}{2}=\tan x$

$\sin x = \frac{1}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서



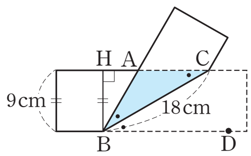
$\overline{AC}=3k$, $\overline{BC}=k\,(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

따라서 $\frac{a}{2}=\tan x=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{k}{2\sqrt{2}k}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$a=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

19 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=9\,\text{cm}$



△BCH에서

$\sin(\angle BCH)=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$

이므로 $\angle BCH=30^\circ$

$\angle ABC=\angle DBC$ (접은 각), $\angle DBC=\angle BCA$ (엇각)$=30^\circ$

이므로 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

이때 $\angle BAH=\angle ABC+\angle ACB=30^\circ+30^\circ=60^\circ$이므로

△BAH에서

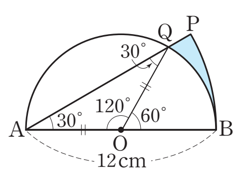
$\overline{AB}=\frac{9}{\sin 60^\circ}=9\div\frac{\sqrt{3}}{2}=9\times\frac{2}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\overline{AC}=\overline{AB}=6\sqrt{3}\,\text{cm}$, $\angle BAC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

20 오른쪽 그림과 같이 반원 O와 $\overline{AP}$의 교점을 Q라 하면



$\overline{OA}=\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times 12=6\,(\text{cm})$

$\angle AQO=\angle QAO=30^\circ$

이때 $\angle AOQ=180^\circ-2\times 30^\circ=120^\circ$,

$\angle QOB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$이므로

(색칠한 부분의 넓이)

$=$(부채꼴 PAB의 넓이)$-$(부채꼴 QOB의 넓이)$-\triangle AOQ$

$=\pi\times 12^2\times\frac{30}{360}-\pi\times 6^2\times\frac{60}{360}-\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=6\pi-9\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

21 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle DBC$이므로

$\frac{1}{2}\times 6\times 4\sqrt{3}\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 6\times\overline{BD}\times\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times 4\sqrt{3}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

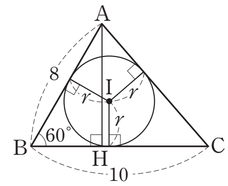
$12\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=3\overline{BD}\times\frac{1}{2}+2\sqrt{3}\,\overline{BD}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$12\sqrt{3}=3\overline{BD}+6\overline{BD}$, $9\overline{BD}=12\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{BD}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

22 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 8\times 10\times\sin 60^\circ=20\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉠

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 내접원 I의 반지름의 길이를 r라 하면



△ABH에서

$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 60^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 60^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$

△AHC에서 $\overline{CH}=10-4=6$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{21}$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times r\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$=\frac{r}{2}(8+10+2\sqrt{21})$

$=r(9+\sqrt{21})$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $20\sqrt{3}=r(9+\sqrt{21})$이므로

$r=\frac{20\sqrt{3}}{9+\sqrt{21}}=3\sqrt{3}-\sqrt{7}$

23 마름모 ABCD의 한 변의 길이를 $x\,\text{cm}$라 하면

$\square ABCD=\overline{AD}\times\overline{AB}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2=36\sqrt{2}$

이므로 $x^2=72$ $\qquad\therefore\ x=6\sqrt{2}\ (\because\ x>0)$

$\therefore$ ($\square$ABCD의 둘레의 길이)$=4x=4\times 6\sqrt{2}$

$=24\sqrt{2}\,(\text{cm})$

24 △BCD에서 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$이므로

$\angle BDC=90^\circ$

$\therefore\ \overline{BD}=10\sin 60^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 5\sqrt{3}\times\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\times 5$

$=20\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{25\sqrt{3}}{2}=\frac{45\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm}^2)$

25 △ABC에서

$\overline{AC}=\overline{BC}\cos 30^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ $\cdots$ (i)

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하면

△PBC에서 $\angle APB=15^\circ+30^\circ=45^\circ$이므로 $\cdots$ (ii)

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 9\times\sin 45^\circ$ $\cdots$ (iii)

$=18\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=9\sqrt{6}$ $\cdots$ (iv)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AC}$의 길이 구하기	30 %
(ii) 두 대각선이 이루는 각의 크기 구하기	20 %
(iii) □ABCD의 넓이를 구하는 식 세우기	30 %
(iv) □ABCD의 넓이 구하기	20 %

Ⅳ 원의 성질

1 원과 직선

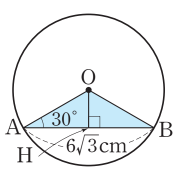
STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 78~79

1 ④	**2** 10 cm	**3** $9\sqrt{3}$ cm^2	**4** 225π	**5** 15	**6** $2\sqrt{2}$ cm
7 12	**8** $3\sqrt{5}$	**9** 2 cm	**10** $x=6$, $y=11$	**11** 11	

1 ① $\angle AOB=\angle DOE$이므로 $\overline{AB}=\overline{DE}$
② $\angle AOB=\angle BOC$이므로 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$
③ $\angle AOC=2\angle DOE$이므로 $\overset{\frown}{AC}=2\overset{\frown}{DE}$
④ 현의 길이는 중심각의 크기에 정비례하지 않으므로 $\overline{AC}\neq 2\overline{AB}$
⑤ $\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OB}=\overline{OE}$, $\angle AOB=\angle DOE$이므로 $\triangle AOB\equiv\triangle DOE$ (SAS 합동)
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

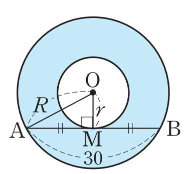
2 $\overline{AB}\perp\overline{OC}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}=8$ cm
$\overline{OB}=x$ cm라 하면 $\overline{OC}=\overline{OB}=x$ cm이므로 $\overline{OM}=(x-4)$ cm
$\triangle OMB$에서 $(x-4)^2+8^2=x^2$, $8x=80$ $\therefore x=10$
따라서 $\overline{OB}=10$ cm이다.

3 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



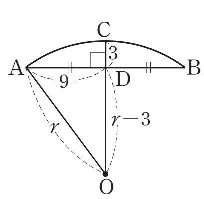
$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}$
$=3\sqrt{3}$ (cm)
$\triangle OAH$에서
$\overline{OH}=\overline{AH}\tan 30^\circ=3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3$ (cm)
$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 3=9\sqrt{3}$ (cm^2)

4 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 작은 원의 접선이므로 접점을 M이라 하면 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$



$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 30=15$
이때 $\overline{OA}=R$, $\overline{OM}=r$라 하면
$\triangle OAM$에서 $\overline{AM}^2=R^2-r^2=15^2=225$이고
(큰 원의 넓이)$=\pi R^2$, (작은 원의 넓이)$=\pi r^2$이므로
(두 원의 넓이의 차)$=\pi(R^2-r^2)=225\pi$

5 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$이고 $\overline{AD}=\overline{BD}$이므로 $\overline{CD}$의 연장선은 점 O를 지난다.

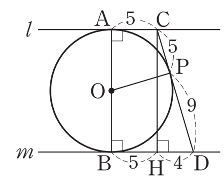


원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{OC}=\overline{OA}=r$이므로
$\overline{OD}=\overline{OC}-\overline{CD}=r-3$
따라서 $\triangle AOD$에서 $9^2+(r-3)^2=r^2$
$6r=90$ $\therefore r=15$

6 $\overline{OM}=\overline{ON}=2$ cm이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}=4$ cm
$\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4=2$ (cm)
$\triangle AMO$에서 $\overline{OA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ (cm)

7 $\overline{OC}=\overline{OA}=5$이므로 $\overline{PO}=8+5=13$
$\angle OAP=90^\circ$이므로 $\triangle APO$에서 $\overline{PA}=\sqrt{13^2-5^2}=12$
따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PB}=12$이다.

8 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CD}=\overline{CP}+\overline{DP}=\overline{AC}+\overline{BD}$
$=5+9=14$
$\overline{DH}=9-5=4$
$\triangle CHD$에서 $\overline{CH}=\sqrt{14^2-4^2}=6\sqrt{5}$
즉, $\overline{AB}=\overline{CH}=6\sqrt{5}$이므로 $\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

9 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$ cm라 하면
$\overline{BE}=\overline{BD}=(8-x)$ cm, $\overline{CE}=\overline{CF}=(6-x)$ cm
$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$이므로 $10=(8-x)+(6-x)$
$2x=4$ $\therefore x=2$

10 □ABCD의 둘레의 길이가 40 cm이므로
$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 40=20$ (cm)
따라서 $x+14=20$에서 $x=6$이고, $9+y=20$에서 $y=11$이다.

11 $\overline{PC}=\overline{PE}$, $\overline{AC}=\overline{AD}$, $\overline{BD}=\overline{BE}$이므로
($\triangle ABP$의 둘레의 길이)$=\overline{PC}+\overline{PE}$
$=2\overline{PE}=2\times 18$
$=36$
즉, $\overline{AB}+\overline{BP}+\overline{PA}=36$이므로
$\overline{AB}+10+15=36$ $\therefore \overline{AB}=11$
다른 풀이 $\overline{PC}=\overline{PE}=18$이므로
$\overline{AC}=\overline{PC}-\overline{PA}=18-15=3$ $\therefore \overline{AD}=\overline{AC}=3$
$\overline{BE}=\overline{PE}-\overline{PB}=18-10=8$이므로 $\overline{BD}=\overline{BE}=8$
$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=3+8=11$

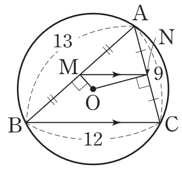
STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 80~84

1 6	**2** 8	**3** 120°	**4** 16 cm	**5** $6\sqrt{3}$	**6** ①
7 ④	**8** ④	**9** ⑤	**10** $(6+2\sqrt{3})$ cm		**11** ⑤
12 20 cm^2		**13** $10\sqrt{3}$	**14** $\frac{36\sqrt{13}}{13}$		**15** ②
16 9π cm^2		**17** $\frac{4\sqrt{15}}{5}$		**18** 36	**19** ③
20 24	**21** 6 cm	**22** 9π cm^2		**23** 64π cm^2	
24 $3(\sqrt{3}-1)$ cm		**25** $\frac{\sqrt{14}}{4}$	**26** $15\sqrt{15}-4\pi$		**27** 17 cm

1 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}\perp\overline{OM}$, $\overline{AC}\perp\overline{ON}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{AN}=\overline{CN}$

따라서 $\triangle ABC$에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의해

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 12=6$



2 원 O의 중심에서 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 $\triangle OPM$과 $\triangle OPN$에서

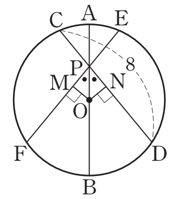
$\angle OMP=\angle ONP=90^\circ$,

$\angle OPM=\angle OPN$, $\overline{OP}$는 공통이므로

$\triangle OPM\equiv\triangle OPN$ (RHA 합동)

$\therefore$ $\overline{OM}=\overline{ON}$

따라서 $\overline{EF}=\overline{CD}=8$이다.



3 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하고, $\overline{OM}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$라 하면

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OC}=\frac{1}{2}r$

$\triangle OAM$에서

$$\cos(\angle AOM)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\frac{\frac{1}{2}r}{r}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\angle AOM=60^\circ$

$\triangle OAM$과 $\triangle OBM$에서

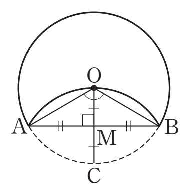
$\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$이고 $\angle AMO=\angle BMO=90^\circ$,

$\overline{OM}$은 공통이므로

$\triangle OAM\equiv\triangle OBM$ (SAS 합동)

$\therefore$ $\angle BOM=\angle AOM=60^\circ$

$\therefore$ $\angle AOB=2\angle AOM=2\times 60^\circ=120^\circ$



4 오른쪽 그림과 같이 큰 원의 반지름의 길이를 R cm, 작은 원의 반지름의 길이를 r cm라 하고, 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 24=12$ (cm)

$4\overline{CD}=24$이므로 $\overline{CD}=6$ (cm)

$\therefore$ $\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 6=3$ (cm)

$\triangle OAH$에서 $\overline{OH}^2=R^2-12^2$

$\triangle OCH$에서 $\overline{OH}^2=r^2-3^2$

즉, $R^2-144=r^2-9$이므로

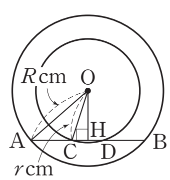
$R^2-r^2=135$, $(R+r)(R-r)=135$

이때 주어진 조건에서 $R+r=27$이므로 $\cdots$ ㉠

$27(R-r)=135$ $\therefore$ $R-r=5$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $R=16$, $r=11$

따라서 큰 원의 반지름의 길이는 16 cm이다.



5 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$를 그으면

$\overline{OC}=\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 16=8$

즉, $\triangle COD$는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로

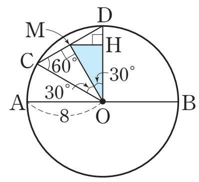
$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$

$\triangle MOH$에서 $\angle MOH=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$이므로

$\overline{OH}=4\sqrt{3}\cos 30^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

$\therefore$ $\triangle MOH=\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{OH}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 6\times\frac{1}{2}=6\sqrt{3}$



6 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 $\overline{CH}$의 연장선은 점 O를 지나므로

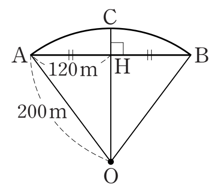
$\overline{OC}=\overline{OA}=200$ m

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 240=120$ (m)

따라서 $\triangle AOH$에서

$\overline{OH}=\sqrt{200^2-120^2}=160$ (m)

$\therefore$ $\overline{CH}=\overline{OC}-\overline{OH}=200-160=40$ (m)



7 오른쪽 그림과 같이 두 반원의 중심 O에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\overline{OG}=\overline{OD}=3$, $\overline{BG}=\overline{EG}$

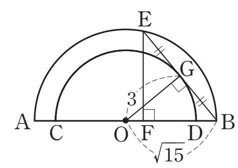
$\triangle OBG$에서 $\overline{BG}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-3^2}=\sqrt{6}$

$\therefore$ $\overline{BE}=2\overline{BG}=2\sqrt{6}$

$\triangle OBG$와 $\triangle EBF$에서 $\angle BGO=\angle BFE=90^\circ$, $\angle B$는 공통이므로 $\triangle OBG\backsim\triangle EBF$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{OB}:\overline{EB}=\overline{OG}:\overline{EF}$에서

$\sqrt{15}:2\sqrt{6}=3:\overline{EF}$ $\therefore$ $\overline{EF}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$



8 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\times 6=3$ (cm)

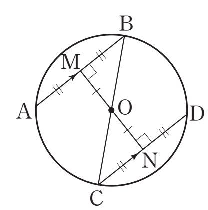
$\triangle BMO$에서 $\overline{OB}=4$ cm이므로

$\overline{OM}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ (cm)

이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{ON}=\overline{OM}=\sqrt{7}$ cm

$\therefore$ $\overline{MN}=\overline{OM}+\overline{ON}=\sqrt{7}+\sqrt{7}=2\sqrt{7}$ (cm)

따라서 두 현 AB와 CD 사이의 거리는 $2\sqrt{7}$ cm이다.



9 오른쪽 그림의 □AMON에서

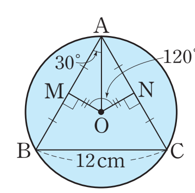
$\angle MAN=360^\circ-(90^\circ+120^\circ+90^\circ)$

$=60^\circ$

$\overline{OM}=\overline{ON}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고

$\angle BAC=60^\circ$이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=12$ cm



$\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6\,(\text{cm})$이고,

$\triangle AMO\equiv\triangle ANO$ (RHS 합동)이므로

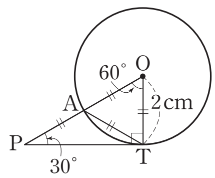
$\angle MAO=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

$\triangle AMO$에서 $\overline{OA}=\frac{\overline{AM}}{\cos 30^\circ}=6\times\frac{2}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

따라서 원 O의 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$ cm이므로 원 O의 넓이는

$\pi\times(4\sqrt{3})^2=48\pi\,(\text{cm}^2)$

10 오른쪽 그림에서 $\angle OTP=90^\circ$이므로



$\triangle OPT$에서

$\angle POT=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\overline{OA}=\overline{OT}$이고 $\angle AOT=60^\circ$이므로

$\triangle OAT$는 정삼각형이다.

$\therefore\ \overline{OT}=\overline{OA}=\overline{AT}=2\,\text{cm}$

$\triangle APT$에서 $\angle PTA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

$\overline{AP}=\overline{AT}=2\,\text{cm}$

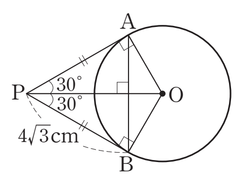
$\therefore\ \overline{OP}=\overline{OA}+\overline{AP}=2+2=4\,(\text{cm})$

$\triangle OPT$에서 $\overline{PT}=\overline{OP}\cos 30^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

따라서 $\triangle OPT$의 둘레의 길이는

$\overline{OP}+\overline{PT}+\overline{OT}=4+2\sqrt{3}+2=6+2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

11 오른쪽 그림의 $\triangle APO$와 $\triangle BPO$에서



$\overline{PA}=\overline{PB}=4\sqrt{3}$ cm,

$\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$,

$\overline{OP}$는 공통이므로

$\triangle APO\equiv\triangle BPO$ (RHS 합동)

$\therefore\ \angle APO=\angle BPO=30^\circ$

①, ② 직각삼각형 OPB에서

$\overline{OP}=\frac{\overline{PB}}{\cos 30^\circ}=4\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=8\,(\text{cm})$

$\overline{OB}=\overline{OP}\sin 30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4\,(\text{cm})$

③ $\angle AOB=360^\circ-(90^\circ+60^\circ+90^\circ)=120^\circ$이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

④ $\square APBO=\triangle APB+\triangle OAB$

$=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PB}\times\sin 60^\circ+4\sqrt{3}$ ($\because$ ③)

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

⑤ $\angle AOB=120^\circ$이므로 ($\because$ ③)

$\widehat{AB}=2\pi\times 4\times\frac{120}{360}=\frac{8}{3}\pi\,(\text{cm})$

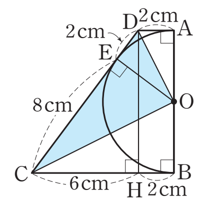
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

다른 풀이 ④ $\triangle OPB=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{OB}$

$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4=8\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

$\therefore\ \square APBO=2\triangle OPB=2\times 8\sqrt{3}=16\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

12 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, 반원 O와 $\overline{CD}$의 접점을 E라 하면 $\overline{BH}=\overline{AD}=2\,\text{cm}$이므로



$\overline{CH}=8-2=6\,(\text{cm})$

$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{DE}=\overline{CB}+\overline{DA}$

$=8+2=10\,(\text{cm})$

$\triangle DCH$에서 $\overline{DH}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8\,(\text{cm})$

즉, $\overline{AB}=\overline{DH}=8\,\text{cm}$

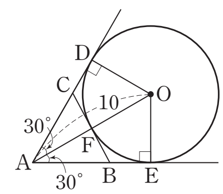
$\overline{OE}$를 그으면 $\overline{OE}\perp\overline{CD}$이고, $\triangle OAD\equiv\triangle OED$ (RHS 합동)이므로

$\overline{OE}=\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4\,(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle COD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{OE}$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 4=20\,(\text{cm}^2)$

13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$, $\overline{OE}$를 그으면



$\angle ODA=\angle OEA=90^\circ$

$\triangle DAO\equiv\triangle EAO$ (RHS 합동)이므로

$\angle DAO=\angle EAO=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

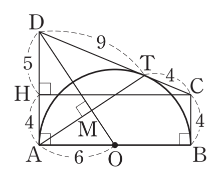
$\triangle OAE$에서

$\overline{AE}=\overline{AO}\cos 30^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

$\overline{AD}=\overline{AE}$, $\overline{CF}=\overline{CD}$, $\overline{BF}=\overline{BE}$이므로

($\triangle ABC$의 둘레의 길이)$=\overline{AD}+\overline{AE}=2\overline{AE}=2\times 5\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

14 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{HA}=\overline{CB}=4$이므로 $\overline{DH}=9-4=5$

$\overline{CD}=\overline{CT}+\overline{DT}=\overline{CB}+\overline{DA}=4+9=13$

$\triangle DHC$에서 $\overline{CH}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

즉, $\overline{AB}=\overline{CH}=12$이므로 $\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6$

이때 $\triangle DAT$는 $\overline{DA}=\overline{DT}$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 $\overline{AT}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{AM}=\overline{TM}$

이때 $\overline{DM}$은 $\overline{AT}$의 수직이등분선이고, $\overline{AT}$는 반원 O의 현이므로 $\overline{DM}$의 연장선은 반원의 중심 O를 지난다.

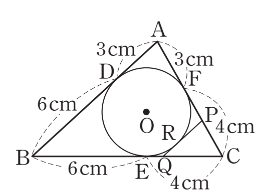
따라서 $\triangle DAO$에서 $\overline{DO}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$이고,

$\overline{DA}\times\overline{OA}=\overline{DO}\times\overline{AM}$이므로

$9\times 6=3\sqrt{13}\times\overline{AM}$ $\quad\therefore\ \overline{AM}=\frac{18\sqrt{13}}{13}$

$\therefore\ \overline{AT}=2\overline{AM}=2\times\frac{18\sqrt{13}}{13}=\frac{36\sqrt{13}}{13}$

15 오른쪽 그림과 같이 원 O와 $\overline{PQ}$의 접점을 R라 하면



$\overline{PR}=\overline{PF}$, $\overline{QR}=\overline{QE}$이므로

($\triangle PQC$의 둘레의 길이)

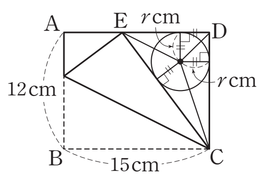
$=\overline{CE}+\overline{CF}$

$=2\overline{CE}=2\overline{CF}=8\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{CE}=\overline{CF}=4\,(\text{cm})$

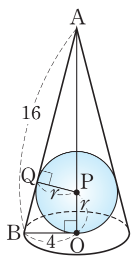
$\overline{AD}=\overline{AF}=\overline{AC}-\overline{CF}=7-4=3\,(\text{cm})$
$\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{BC}-\overline{CE}=10-4=6\,(\text{cm})$
$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=3+6=9\,(\text{cm})$
$\therefore$ ($\triangle$ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=9+10+7=26\,(\text{cm})$

16 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ECD에서
$\overline{EC}=\overline{BC}=15\,\text{cm}$이므로
$\overline{ED}=\sqrt{15^2-12^2}=9\,(\text{cm})$
$\triangle$ECD의 내접원의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면



$\triangle ECD=\dfrac{1}{2}(15+12+9)r=18r\,(\text{cm}^2)$
또 $\triangle ECD=\dfrac{1}{2}\times\overline{ED}\times\overline{DC}=\dfrac{1}{2}\times9\times12=54\,(\text{cm}^2)$
이므로 $18r=54$ $\quad\therefore\ r=3$
따라서 원의 넓이는 $\pi\times3^2=9\pi\,(\text{cm}^2)$이다.

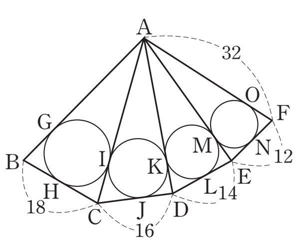
17 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 밑면의 중심을 O, 구의 중심을 P, 점 P에서 모선 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자.



$\angle AOB=90^\circ$이므로 $\triangle$ABO에서
$\overline{AO}=\sqrt{16^2-4^2}=4\sqrt{15}$이고
$\overline{BQ}=\overline{BO}=4$이므로 $\overline{AQ}=16-4=12$
이때 구의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{PO}=\overline{PQ}=r,\ \overline{AP}=\overline{AO}-\overline{PO}=4\sqrt{15}-r$
$\triangle$AQP에서 $12^2+r^2=(4\sqrt{15}-r)^2$
$8\sqrt{15}r=96$ $\quad\therefore\ r=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

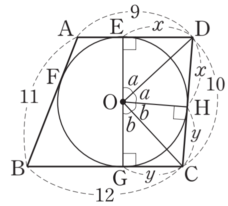
다른 풀이 $\triangle$ABO에서 $\angle AOB=90^\circ$이므로
$\overline{AO}=\sqrt{16^2-4^2}=4\sqrt{15}$
이때 구의 반지름의 길이를 r라 하면
$\overline{PO}=\overline{PQ}=r,\ \overline{AP}=4\sqrt{15}-r$
$\triangle ABO\backsim\triangle APQ$ (AA 닮음)이므로
$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{BO}:\overline{PQ}$에서 $16:(4\sqrt{15}-r)=4:r$
$20r=16\sqrt{15}$ $\quad\therefore\ r=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

18 오른쪽 그림과 같이 4개의 원이 각각의 삼각형과 내접하고 있는 접점을 각각 G, H, I, J, K, L, M, N, O라 하자.



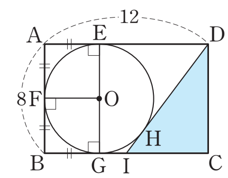
이때 $\overline{FO}=x$라 하면
$\overline{AO}=32-x$
$\overline{FN}=\overline{FO}=x$
$\overline{EN}=\overline{EM}=\overline{EL}=12-x$
$\overline{DL}=\overline{DK}=\overline{DJ}=14-(12-x)=x+2$
$\overline{CJ}=\overline{CI}=\overline{CH}=16-(x+2)=14-x$
$\overline{BH}=\overline{BG}=18-(14-x)=x+4$
또 $\overline{AO}=\overline{AM}=\overline{AK}=\overline{AI}=\overline{AG}=32-x$이므로
$\overline{AB}=\overline{AG}+\overline{BG}=(32-x)+(x+4)=36$

19 오른쪽 그림에서
$\overline{DH}=\overline{DE}=x,\ \overline{CH}=\overline{CG}=y$이므로
$\overline{DC}=x+y$
$\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로
$11+(x+y)=9+12$
$\therefore\ x+y=10$



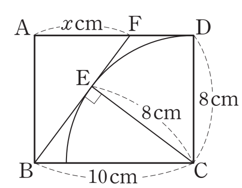
$\triangle DOE\equiv\triangle DOH$ (RHS 합동), $\triangle COG\equiv\triangle COH$ (RHS 합동)이므로
$\angle EOD=\angle HOD=\angle a,\ \angle GOC=\angle HOC=\angle b$라 하면
$2\angle a+2\angle b=180^\circ$ $\quad\therefore\ \angle a+\angle b=90^\circ$
따라서 $\triangle$DOC는 $\angle DOC=90^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{OH}^2=\overline{DH}\times\overline{CH}$에서 $4^2=xy$ $\quad\therefore\ xy=16$
$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\times16=68$

20 오른쪽 그림에서
$\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{BG}=\dfrac{1}{2}\times8=4$
이므로



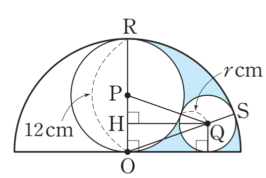
$\overline{DH}=\overline{DE}=\overline{CG}=12-4=8$
$\overline{IG}=\overline{IH}=x$라 하면
$\overline{DI}=8+x,\ \overline{CI}=8-x$
따라서 $\triangle$DIC에서
$(8-x)^2+8^2=(8+x)^2,\ 32x=64$ $\quad\therefore\ x=2$
$\therefore\ \triangle DIC=\dfrac{1}{2}\times\overline{CI}\times\overline{DC}=\dfrac{1}{2}\times6\times8=24$

21 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CE}$를 그으면
$\overline{CE}=\overline{CD}=8\,\text{cm}$이고,
$\angle CEB=90^\circ$이므로 $\triangle$BCE에서
$\overline{BE}=\sqrt{10^2-8^2}=6\,(\text{cm})$
$\overline{AF}=x\,\text{cm}$라 하면



$\overline{EF}=\overline{FD}=\overline{AD}-\overline{AF}=10-x\,(\text{cm})$이므로
$\overline{BF}=\overline{BE}+\overline{EF}=6+(10-x)=16-x\,(\text{cm})$
따라서 $\triangle$ABF에서
$x^2+8^2=(16-x)^2,\ 32x=192$
$\therefore\ x=6$

22 오른쪽 그림과 같이 반원 O와 원 P의 접점을 R, $\overline{OQ}$의 연장선과 반원 O의 교점을 S라 하면 $\overline{OR}$는 원 P의 지름이므로 원 P의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\times12=6\,(\text{cm})$



원 Q의 중심에서 $\overline{OR}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 Q의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면
$\overline{OQ}=\overline{OS}-\overline{QS}=12-r\,(\text{cm}),\ \overline{OH}=r\,\text{cm}$
$\overline{PQ}=(6+r)\,\text{cm},\ \overline{PH}=\overline{PO}-\overline{OH}=6-r\,(\text{cm})$
$\triangle$QHO에서 $\overline{QH}^2=(12-r)^2-r^2$
$\triangle$QPH에서 $\overline{QH}^2=(6+r)^2-(6-r)^2$
즉, $(12-r)^2-r^2=(6+r)^2-(6-r)^2$
$48r=144$ $\quad\therefore\ r=3$

∴ (색칠한 부분의 넓이)

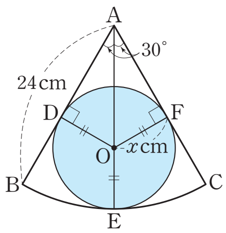
$=$(사분원 O의 넓이)$-${(반원 P의 넓이)$+$(원 Q의 넓이)}

$=\pi\times12^2\times\frac{90}{360}-\left(\pi\times6^2\times\frac{180}{360}+\pi\times3^2\right)$

$=36\pi-(18\pi+9\pi)=9\pi\ (\text{cm}^2)$

23 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=24\,\text{cm}$이고, 부채꼴 CAB의 둘레의 길이가 $(48+8\pi)\,\text{cm}$이므로 $\overparen{BC}=8\pi\,\text{cm}$

$\angle BAC=\angle a$라 하면



$2\pi\times24\times\frac{a}{360}=8\pi \qquad \therefore \angle a=60°$

$\overline{AE}$, $\overline{OD}$, $\overline{OF}$를 그으면

$\triangle ADO\equiv\triangle AFO$ (RHS 합동)이므로

$\angle OAF=\frac{1}{2}\times60°=30°$

$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=x\,\text{cm}$라 하면

$\overline{AO}=\overline{AE}-\overline{OE}=24-x\ (\text{cm})$

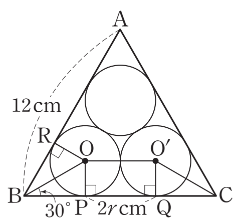
이때 $\triangle AOF$에서 $\overline{AO}=\frac{\overline{OF}}{\sin30°}=2x\ (\text{cm})$

즉, $24-x=2x$이므로 $3x=24 \qquad \therefore x=8$

∴ (원 O의 넓이)$=\pi\times8^2=64\pi\ (\text{cm}^2)$

24 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$에 접하는 두 원의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 접점을 각각 P, Q라 하자.

원의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면



$\overline{PQ}=2r\,\text{cm}$

원 O와 $\overline{AB}$의 접점을 R라 하면

$\triangle OBP\equiv\triangle OBR$ (RHS 합동)이므로

$\angle OBP=\angle OBR=\frac{1}{2}\times60°=30°$

$\triangle OBP$에서 $\overline{BP}=\frac{\overline{OP}}{\tan30°}=\sqrt{3}r\ (\text{cm})$

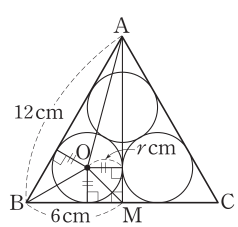
같은 방법으로 $\triangle O'CQ$에서 $\overline{CQ}=\sqrt{3}r\,\text{cm}$

이때 $\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{CQ}$이므로

$12=\sqrt{3}r+2r+\sqrt{3}r,\ 2(\sqrt{3}+1)r=12$

$\therefore r=\frac{6}{\sqrt{3}+1}=3(\sqrt{3}-1)$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times12=6\sqrt{3}\ (\text{cm})$

세 원 중 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 접하는 원의 중심을 O라 하고, 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하면

$\triangle ABM=\triangle OAB+\triangle OBM+\triangle OMA$이므로

$\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times12\times r+\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times r$

$18\sqrt{3}=6r+3r+3\sqrt{3}r,\ (3+\sqrt{3})r=6\sqrt{3}$

$\therefore r=\frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}(3-\sqrt{3})=3\sqrt{3}-3=3(\sqrt{3}-1)$

25 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지나므로 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 수직이등분선의 교점 P는 원의 중심이고

$\triangle PAB$에서 $\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}\times(180°-90°)=45°$

$\triangle PAM$에서 $\angle AMP=90°$이므로

$\angle APM=180°-(45°+90°)=45°$

즉, $\triangle PAM$은 $\overline{AM}=\overline{PM}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{AB}:\overline{CD}=2:1$이므로 $\overline{AB}=2a$, $\overline{CD}=a\,(a>0)$라 하면

$\triangle PAM$에서 $\overline{PM}=\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2a=a$

$\therefore \overline{PA}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$

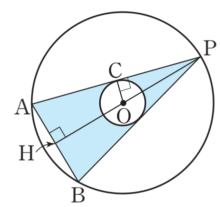
$\triangle PDN$에서 $\overline{PD}=\overline{PA}=\sqrt{2}a$이고

$\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{a}{2}$

$\therefore \overline{PN}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$

$\therefore \sin x=\frac{\overline{PN}}{\overline{PD}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

26 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 작은 원과 $\overline{PA}$의 접점을 C라 하고 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OC}\perp\overline{PA}$, $\overline{PC}=\overline{AC}$이므로

$\triangle PCO$에서

$\overline{PC}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

$\therefore \overline{PA}=2\overline{PC}=2\times2\sqrt{15}=4\sqrt{15}$

이때 $\triangle PCO\backsim\triangle PHA$ (AA 닮음)이므로

$\overline{PO}:\overline{PA}=\overline{OC}:\overline{AH}$에서

$8:4\sqrt{15}=2:\overline{AH} \qquad \therefore \overline{AH}=\sqrt{15}$

따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{15}$

또 $\overline{PO}:\overline{PA}=\overline{PC}:\overline{PH}$에서

$8:4\sqrt{15}=2\sqrt{15}:\overline{PH} \qquad \therefore \overline{PH}=15$

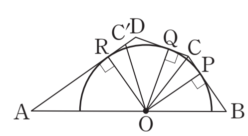
∴ (색칠한 부분의 넓이)$=\triangle PAB-$(작은 원의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}-\pi\times2^2$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{15}\times15-4\pi$

$=15\sqrt{15}-4\pi$

27 오른쪽 그림과 같이 $\triangle OCQ$를 $\overline{OQ}$가 $\overline{OR}$와 일치하도록 점 O를 중심으로 하여 시계 반대 방향으로 회전한 삼각형을 $\triangle OC'R$라 하고



$\angle OCQ=\angle OC'R=\angle a$라 하면

$\triangle OCQ\equiv\triangle OCP$ (RHS 합동)이므로

$\angle OCP=\angle OCQ=\angle a$에서 $\angle C=2\angle a$

이때 $\angle B+\angle D=180°$이므로 $\angle A+\angle C=180°$에서

$\angle A+2\angle a=180°$, $\angle A=180°-2\angle a$

$\triangle OC'A$에서

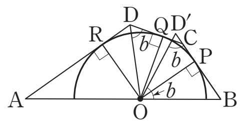
$\angle AOC'=180°-(\angle C'AO+\angle AC'O)$

$=180°-\{(180°-2\angle a)+\angle a\}$

$=\angle a$

따라서 $\triangle OC'A$는 $\overline{AO}=\overline{AC'}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{AO}=\overline{AC'}=\overline{AR}+\overline{C'R}=\overline{AR}+\overline{CQ}=10\,(\text{cm})$



마찬가지로 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ODQ$를 $\overline{OQ}$가 $\overline{OP}$와 일치하도록 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 회전한 삼각형을 $\triangle OPD'$이라 하고

$\angle ODQ=\angle OD'P=\angle b$라 하면

$\triangle ODQ\equiv\triangle ODR$ (RHS 합동)이므로

$\angle ODR=\angle ODQ=\angle b$에서 $\angle D=2\angle b$

이때 $\angle B+\angle D=180^\circ$이므로

$\angle B+2\angle b=180^\circ$, $\angle B=180^\circ-2\angle b$

$\triangle OBD'$에서

$\angle BOD'=180^\circ-(\angle OBD'+\angle OD'B)$

$=180^\circ-\{(180^\circ-2\angle b)+\angle b\}$

$=\angle b$

따라서 $\triangle OBD'$은 $\overline{BO}=\overline{BD'}$인 이등변삼각형이다.

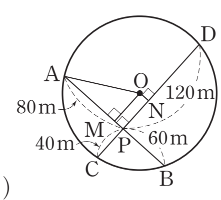
$\therefore\ \overline{BO}=\overline{BD'}=\overline{BP}+\overline{D'P}=\overline{BP}+\overline{DQ}=4+3=7\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AO}+\overline{BO}=10+7=17\,(\text{cm})$

STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 85~86

01 $20\sqrt{65}\pi$ m	02 $4\sqrt{6}$ cm	03 78	04 $8\sqrt{6}-8$
05 6	06 $24\,\text{cm}^2$	07 16	08 12

01 길잡이 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분함을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CN}=\overline{DN}$이므로

$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times(60+80)=70\,(\text{m})$

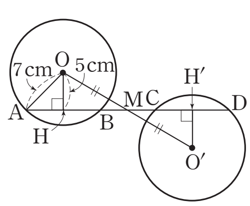
$\overline{DN}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times(40+120)=80\,(\text{m})$

$\therefore\ \overline{MO}=\overline{PN}=\overline{DP}-\overline{DN}=120-80=40\,(\text{m})$

$\triangle AMO$에서 $\overline{AO}=\sqrt{70^2+40^2}=10\sqrt{65}\,(\text{m})$

따라서 호수의 둘레의 길이는 $2\pi\times10\sqrt{65}=20\sqrt{65}\pi\,(\text{m})$이다.

02 길잡이 원 O′의 중심에서 $\overline{CD}$에 내린 수선을 내린 후, $\triangle OHM$과 합동인 삼각형을 찾는다.



오른쪽 그림과 같이 원 O′의 중심에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\triangle OHM$과 $\triangle O'H'M$에서

$\angle OHM=\angle O'H'M=90^\circ$,

$\overline{OM}=\overline{O'M}$, $\angle OMH=\angle O'MH'$(맞꼭지각)이므로

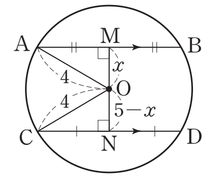
$\triangle OHM\equiv\triangle O'H'M$ (RHA 합동)

따라서 $\overline{OH}=\overline{O'H'}$이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$이다.

$\triangle OHA$에서 $\overline{AH}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{CD}=\overline{AB}=2\overline{AH}=2\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}\,(\text{cm})$

03 길잡이 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 각각 수선을 내린 후, 피타고라스 정리를 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CN}=\overline{DN}$

이때 $\overline{OM}=x$라 하면 $\overline{ON}=5-x$

$\triangle AOM$에서 $\overline{AM}=\sqrt{4^2-x^2}=\sqrt{16-x^2}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{16-x^2}$

$\triangle OCN$에서 $\overline{CN}=\sqrt{4^2-(5-x)^2}=\sqrt{-x^2+10x-9}$

$\therefore\ \overline{CD}=2\overline{CN}=2\sqrt{-x^2+10x-9}$

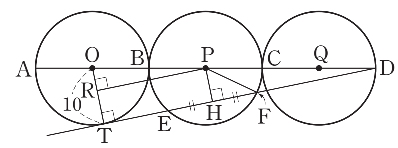
$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4(16-x^2)+4(-x^2+10x-9)$

$=-8x^2+40x+28$

$=-8\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+78$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$의 최댓값은 78이다.

04 길잡이 두 원 O, P의 중심에서 $\overline{DT}$에 각각 수선을 내린 후, 닮은 두 삼각형을 찾아 $\overline{PH}$의 길이를 먼저 구한다.



원 P의 중심에서 $\overline{DT}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle DPH$와 $\triangle DOT$에서 $\angle DHP=\angle DTO=90^\circ$이고, $\angle D$는 공통이므로

$\triangle DPH\sim\triangle DOT$ (AA 닮음)

세 원 O, P, Q의 반지름의 길이가 모두 10이므로

$\overline{OT}=10$, $\overline{DP}=30$, $\overline{DO}=50$

따라서 $\overline{DP}:\overline{DO}=\overline{PH}:\overline{OT}$에서 $30:50=\overline{PH}:10$

$50\overline{PH}=300\quad\therefore\ \overline{PH}=6$

이때 $\overline{PF}$를 그으면 $\overline{PF}=10$이므로 $\triangle PHF$에서

$\overline{HF}=\sqrt{10^2-6^2}=8\qquad\therefore\ \overline{EH}=\overline{HF}=8$

또 원 P의 중심에서 $\overline{OT}$에 내린 수선의 발을 R라 하면

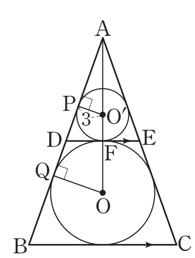
$\overline{RT}=\overline{PH}=6\qquad\therefore\ \overline{OR}=\overline{OT}-\overline{RT}=10-6=4$

이때 $\triangle ORP$에서 $\overline{OP}=20$이므로

$\overline{RP}=\sqrt{20^2-4^2}=8\sqrt{6}\qquad\therefore\ \overline{TH}=\overline{RP}=8\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{TE}=\overline{TH}-\overline{EH}=8\sqrt{6}-8$

05 길잡이 두 원 O′, O의 중심에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 할 때, $\triangle ABC\sim\triangle ADE$, $\triangle APO'\sim\triangle AQO$임을 이용한다.



오른쪽 그림에서 $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이므로

$\triangle ABC\sim\triangle ADE$ (AA 닮음)

두 원 O, O′의 접점을 F라 하면

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DE}=3:2$이고

$\overline{DF}=\overline{EF}$이므로 $\overline{AD}:\overline{DF}=3:1$

이때 두 원 O′, O의 중심에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고,

$\overline{DF}=k\,(k>0)$라 하면

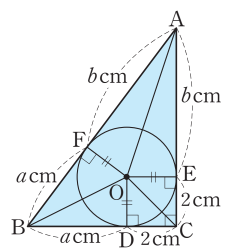
$\overline{DP}=\overline{DF}=\overline{DQ}=k$이고 $\overline{AD}=3k$이므로

$\overline{AP}=\overline{AD}-\overline{DP}=3k-k=2k$

$\overline{AQ}=\overline{AD}+\overline{DQ}=3k+k=4k$

이때 $\triangle APO'$과 $\triangle AQO$에서 $\angle APO' = \angle AQO = 90^\circ$이고,
$\angle A$는 공통이므로 $\triangle APO' \backsim \triangle AQO$ (AA 닮음)
따라서 $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{PO'} : \overline{QO}$이므로 $2k : 4k = 3 : \overline{QO}$
$1 : 2 = 3 : \overline{QO}$ $\quad \therefore \overline{QO} = 6$
따라서 원 O의 반지름의 길이는 6이다.

06 **길잡이** $\overline{BD} = \overline{BF} = a\,\text{cm}$, $\overline{AE} = \overline{AF} = b\,\text{cm}$라 할 때 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 a, b에 관한 식으로 나타낸 후, 점 P의 속력은 점 Q의 속력의 $\frac{7}{3}$배임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구해 본다.



오른쪽 그림에서 $\overline{BD} = \overline{BF} = a\,\text{cm}$,
$\overline{AE} = \overline{AF} = b\,\text{cm}$라 하면
(점 P가 움직인 거리)$=(2a+b)\,\text{cm}$
(점 Q가 움직인 거리)$=b\,\text{cm}$
이때 점 P의 속력은 점 Q의 속력의 $\frac{7}{3}$배이므로 두 점 P, Q가 점 A에 도착할 때까지 걸린 시간을 t라 하면

$\frac{2a+b}{t} = \frac{7}{3} \times \frac{b}{t}$에서 $2a+b = \frac{7}{3}b$ $\quad \therefore b = \frac{3}{2}a$ $\quad \cdots$ ㉠

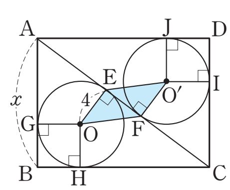
원 O의 반지름의 길이가 2 cm이므로 $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = 2\,\text{cm}$이고, □ODCE는 정사각형이므로 $\overline{CD} = \overline{CE} = 2\,\text{cm}$이다.
이때 $\triangle ABC$의 넓이를 구해 보면

(i) $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times (a+2) \times (b+2)$
$\quad = \frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{2}a + 2$ ($\because$ ㉠)

(ii) $\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$
$\quad = \frac{1}{2} \times (a+b) \times 2 + \frac{1}{2} \times (a+2) \times 2 + \frac{1}{2} \times (b+2) \times 2$
$\quad = 2a + 2b + 4 = 5a + 4$ ($\because$ ㉠)

(i), (ii)에서 $\frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{2}a + 2 = 5a + 4$, $3a^2 - 10a - 8 = 0$
$(3a+2)(a-4) = 0$ $\quad \therefore a = 4$ ($\because a > 0$)
$\therefore \triangle ABC = 5a + 4 = 5 \times 4 + 4 = 24\,(\text{cm}^2)$

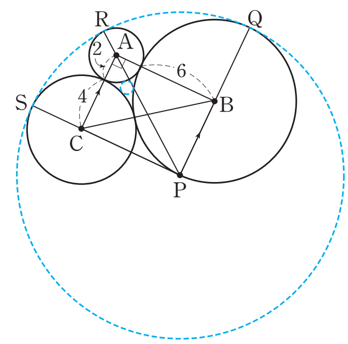
07 **길잡이** 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 먼저 구한다.



오른쪽 그림과 같이 두 원 O, O'과 □ABCD의 접점을 각각 G, H, I, J라 하자.
□ABCD의 둘레의 길이가 56이므로 $\overline{AB} = x$라 하면
$\overline{BC} = \frac{1}{2} \times (56 - 2x) = 28 - x$
$\overline{AE} = \overline{AG}$, $\overline{CE} = \overline{CH}$이고 원 O의 반지름의 길이가 4이므로
$\overline{BG} = \overline{BH} = 4$
$\therefore \overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE} = \overline{AG} + \overline{CH}$
$\quad = (\overline{AB} - \overline{BG}) + (\overline{BC} - \overline{BH})$
$\quad = (x-4) + \{(28-x) - 4\} = 20$
$\triangle ABC$에서 $x^2 + (28-x)^2 = 20^2$, $x^2 - 28x + 192 = 0$
$(x-12)(x-16) = 0$ $\quad \therefore x = 12$ 또는 $x = 16$
그런데 $\overline{AB} < \overline{BC}$이므로 $x = 12$
$\therefore \overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 28 - 12 = 16$

이때 $\overline{AE} = \overline{AG} = \overline{AB} - \overline{BG} = 12 - 4 = 8$,
$\overline{CF} = \overline{CI} = \overline{CD} - \overline{DI} = 12 - 4 = 8$이므로
$\overline{EF} = \overline{AC} - \overline{AE} - \overline{CF} = 20 - 8 - 8 = 4$
따라서 $\triangle EOF \equiv \triangle FO'E$ (SAS 합동)이므로
□EOFO'$= 2\triangle EOF = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) = 16$

08 **길잡이** 원 B의 중심을 지나면서 $\overline{AC}$와 평행한 직선이 원 B와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 세 원에 동시에 접하는 두 원 중 큰 원의 반지름은 $\overline{PQ}$임을 이용한다.



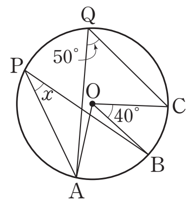
세 원 A, B, C에 동시에 접하는 두 원은 위의 그림에서 점선으로 나타낸 두 원이다.
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$를 그으면
$\overline{AB} = 2 + 6 = 8$, $\overline{CA} = 2 + 4 = 6$, $\overline{BC} = 4 + 6 = 10$
이때 $8^2 + 6^2 = 10^2$, 즉 $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$이므로 $\angle A = 90^\circ$
원 B의 중심을 지나면서 $\overline{AC}$와 평행한 직선이 원 B와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{PC}$를 그으면 $\overline{AC} /\!/ \overline{BP}$이고
$\overline{AC} = \overline{BP} = 6$이므로 □ACPB는 평행사변형이다.
그런데 $\angle A = 90^\circ$이므로 □ACPB는 직사각형이다.
$\therefore \overline{AP} = \overline{BC} = 10$
$\overline{PA}$의 연장선이 원 A와 만나는 점을 R, $\overline{PC}$의 연장선이 원 C와 만나는 점을 S라 하면
$\overline{PQ} = 2\overline{BP} = 12$, $\overline{PR} = \overline{AP} + \overline{AR} = 10 + 2 = 12$,
$\overline{PS} = \overline{PC} + \overline{CS} = \overline{AB} + \overline{CS} = 8 + 4 = 12$
$\therefore \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{PS} = 12$
따라서 점 P는 세 원 A, B, C에 동시에 접하는 두 원 중 큰 원의 중심이고, 원 P의 반지름의 길이는 12이다.

2 원주각

STEP 1 개념 + 대표 문제 확인하기 P. 87~92

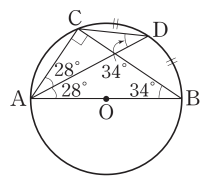
1 30°	**2** 34°	**3** 96°	**4** 114°	**5** ②	
6 $\angle x = 115^\circ$, $\angle y = 95^\circ$			**7** 67°	**8** 88°	
9 ㄱ, ㄹ, ㅂ		**10** 110°	**11** 30°	**12** 44°	
13 $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$		**14** 60°	**15** 130°	**16** 4	**17** 10
18 6π	**19** 18	**20** 30	**21** $\frac{121}{4}\pi$	**22** 6	**23** ②
24 64π	**25** 6	**26** $\frac{5}{2}$ cm	**27** 27	**28** 6	**29** 5
30 9	**31** 2				

1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면



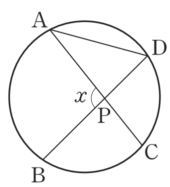
$\angle AOC=2\angle AQC=2\times 50^\circ=100^\circ$
이므로
$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC$
$=100^\circ-40^\circ=60^\circ$
$\therefore\ \angle x=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면



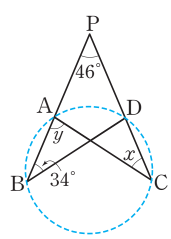
$\widehat{CD}=\widehat{BD}$이므로
$\angle CAD=\angle BAD=28^\circ$
$\therefore\ \angle BAC=28^\circ+28^\circ=56^\circ$
$\overline{AB}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ACB=90^\circ$
따라서 $\triangle ABC$에서 $\angle ABC=180^\circ-(90^\circ+56^\circ)=34^\circ$이므로
$\angle ADC=\angle ABC=34^\circ$

3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면 $\widehat{AB}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\dfrac{1}{3}$이므로



($\widehat{AB}$에 대한 중심각의 크기)$=360^\circ\times\dfrac{1}{3}$
$=120^\circ$
$\therefore\ \angle ADB=\dfrac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$
$\widehat{AB}:\widehat{CD}=5:3$이므로
$\angle ADB:\angle DAC=60^\circ:\angle DAC=5:3$
$\therefore\ \angle DAC=36^\circ$
따라서 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점을 P라 하면 $\triangle APD$에서
$\angle x=60^\circ+36^\circ=96^\circ$

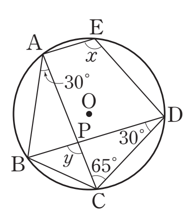
4 오른쪽 그림에서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로



$\angle x=\angle ABD=34^\circ$
$\triangle ACP$에서 $\angle y=46^\circ+34^\circ=80^\circ$
$\therefore\ \angle x+\angle y=34^\circ+80^\circ=114^\circ$

5 $\angle x=\dfrac{1}{2}\angle BOD=\dfrac{1}{2}\times 140^\circ=70^\circ$
$\square ABCD$가 원 O에 내접하므로
$\angle x+\angle y=180^\circ$, $\angle y=180^\circ-\angle x=180^\circ-70^\circ=110^\circ$
$\therefore\ \angle y-\angle x=110^\circ-70^\circ=40^\circ$

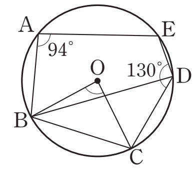
6 오른쪽 그림에서 $\square ACDE$가 원 O에 내접하므로



$\angle x+65^\circ=180^\circ\qquad\therefore\ \angle x=115^\circ$
$\angle BDC=\angle BAC=30^\circ$이므로
$\triangle CDP$에서 $\angle y=65^\circ+30^\circ=95^\circ$

7 $\triangle DCP$에서 $112^\circ=45^\circ+\angle DCP\qquad\therefore\ \angle DCP=67^\circ$
따라서 $\angle BCD=180^\circ-67^\circ=113^\circ$이므로
$\angle A+\angle BCD=180^\circ$에서 $\angle A=180^\circ-113^\circ=67^\circ$

8 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



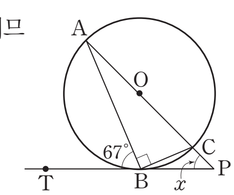
$\square ABDE$가 원에 내접하므로
$\angle BDE=180^\circ-94^\circ=86^\circ$
$\angle BDC=130^\circ-86^\circ=44^\circ$
$\therefore\ \angle BOC=2\angle BDC=2\times 44^\circ=88^\circ$

9 ㄱ. $\square ABCD$는 등변사다리꼴이므로
$\angle A=\angle D=\dfrac{1}{2}\times(360^\circ-70^\circ-70^\circ)=110^\circ$
따라서 $\angle A+\angle C=110^\circ+70^\circ=180^\circ$이므로
$\square ABCD$는 원에 내접한다.
ㄴ. $\square ABCD$는 평행사변형이므로 $\angle A=\angle C=104^\circ$
$\angle A+\angle C=104^\circ+104^\circ=208^\circ\neq 180^\circ$
따라서 $\square ABCD$는 원에 내접하지 않는다.
ㄷ. $\triangle BCD$에서 $\angle BDC=110^\circ-80^\circ=30^\circ$이므로
$\angle BAC\neq\angle BDC$
따라서 $\square ABCD$는 원에 내접하지 않는다.
ㄹ. $\angle BAD=180^\circ-80^\circ=100^\circ$이고,
$\angle BCD=180^\circ-100^\circ=80^\circ$이므로
$\angle BAD+\angle BCD=100^\circ+80^\circ=180^\circ$
따라서 $\square ABCD$는 원에 내접한다.
ㅁ. $\triangle ABC$에서 $\angle B=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$이므로
$\angle B+\angle D=60^\circ+100^\circ=160^\circ\neq 180^\circ$
따라서 $\square ABCD$는 원에 내접하지 않는다.
ㅂ. $\triangle FAB$에서 $\angle ABF=180^\circ-(56^\circ+28^\circ)=96^\circ$
$\triangle DAE$에서 $\angle ADE=180^\circ-(56^\circ+40^\circ)=84^\circ$
따라서 $\angle ABC+\angle ADC=96^\circ+84^\circ=180^\circ$이므로
$\square ABCD$는 원에 내접한다.
따라서 $\square ABCD$가 원에 내접하는 것은 ㄱ, ㄹ, ㅂ이다.

10 $\angle x=\angle BCA=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 130^\circ=65^\circ$
$\triangle OAB$에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로
$\angle OBA=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-130^\circ)=25^\circ$
$\angle CBA=\angle CAT=70^\circ$이므로
$\angle y+25^\circ=70^\circ\qquad\therefore\ \angle y=45^\circ$
$\therefore\ \angle x+\angle y=65^\circ+45^\circ=110^\circ$

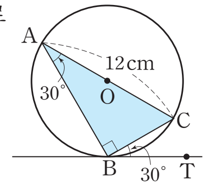
11 $\triangle ABC$에서 $\angle ABC=180^\circ-(32^\circ+48^\circ)=100^\circ$
$\therefore\ \angle y=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-100^\circ=80^\circ$
$\angle CAD=\angle CDT'=50^\circ$이므로
$\triangle ACD$에서 $\angle x=180^\circ-(50^\circ+80^\circ)=50^\circ$
$\therefore\ \angle y-\angle x=80^\circ-50^\circ=30^\circ$

12 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}$가 원 O의 지름이므로 $\overline{BC}$를 그으면 $\angle ABC=90^\circ$



$\therefore\ \angle CBP=180^\circ-(67^\circ+90^\circ)=23^\circ$
$\angle ACB=\angle ABT=67^\circ$이므로
$\triangle CBP$에서 $67^\circ=23^\circ+\angle x$
$\therefore\ \angle x=44^\circ$

13 오른쪽 그림에서 $\overline{AC}$가 원 O의 지름이므로



$\angle ABC=90^\circ$이고

$\angle CAB=\angle CBT=30^\circ$이므로

$\triangle ABC$에서

$\overline{BC}=\overline{AC}\sin 30^\circ=12\times\frac{1}{2}=6\,(\text{cm})$

$\overline{AB}=\overline{AC}\cos 30^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3}=18\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

14 $\angle BPT=\angle BAP=62^\circ$, $\angle CPT=\angle CDP=58^\circ$

$\therefore\ \angle CPD=180^\circ-(62^\circ+58^\circ)=60^\circ$

15 $\angle x=\angle BTQ=\angle CDT=72^\circ$

$\angle y=\angle ABT=58^\circ$

$\therefore\ \angle x+\angle y=72^\circ+58^\circ=130^\circ$

16 $\overline{PD}=x$라 하면 $\overline{PC}=10-x$

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로 $3\times 8=(10-x)\times x$

$x^2-10x+24=0$, $(x-4)(x-6)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=6$

그런데 $\overline{PC}>\overline{PD}$이므로 $\overline{PD}=4$

17 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

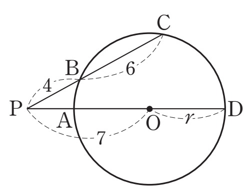
$\overline{PO}=r-5$, $\overline{PB}=\overline{PO}+\overline{BO}=(r-5)+r=2r-5$

또 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$이므로 $\overline{PD}=\overline{PC}=5\sqrt{3}$

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로 $5\times(2r-5)=(5\sqrt{3})^2$

$2r=20\qquad\therefore\ r=10$

18 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$의 연장선이 원과 만나는 점을 D라 하고 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{PA}=7-r$, $\overline{PD}=7+r$

$\overline{PA}\cdot\overline{PD}=\overline{PB}\cdot\overline{PC}$이므로

$(7-r)(7+r)=4\times(4+6)$

$49-r^2=40$, $r^2=9\qquad\therefore\ r=3(\because\ r>0)$

$\therefore$ (원 O의 둘레의 길이)$=2\pi\times 3=6\pi$

19 □ABCD가 원에 내접하려면 $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$이어야 하므로

$4\times 9=3\times x\qquad\therefore\ x=12$

□EFGH가 원에 내접하려면 $\overline{QE}\cdot\overline{QH}=\overline{QF}\cdot\overline{QG}$이어야 하므로

$5\times(5+3)=4\times(4+y)$

$40=16+4y\qquad\therefore\ y=6$

$\therefore\ x+y=12+6=18$

20 원 O에서 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$이므로

$\overline{PA}\times 3=6\times 6\qquad\therefore\ \overline{PA}=12$

원 O′에서 $\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PE}\cdot\overline{PF}$이므로

$2\times\overline{PD}=6\times 6\qquad\therefore\ \overline{PD}=18$

$\therefore\ \overline{PA}+\overline{PD}=12+18=30$

21 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{PB}=4+2r$

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로 $4\times(4+2r)=6\times(6+4)$

$16+8r=60\qquad\therefore\ r=\frac{11}{2}$

$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi\times\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{121}{4}\pi$

22 $\overline{QA}\cdot\overline{QB}=\overline{QC}\cdot\overline{QT}$이므로

$\overline{QA}\times 6=4\times 18\qquad\therefore\ \overline{QA}=12$

$\overline{PA}=x$라 하면 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로

$12^2=x(x+12+6)$, $x^2+18x-144=0$

$(x+24)(x-6)=0\qquad\therefore\ x=6(\because\ x>0)$

23 $\overline{PT}$가 원의 접선이므로 $\angle ATP=\angle ABT$

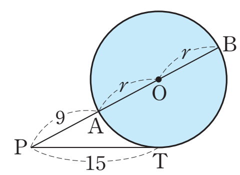
$\angle APT=\angle ABT$이므로 $\angle ATP=\angle APT$

즉, $\triangle APT$는 $\overline{AP}=\overline{AT}=2\,\text{cm}$인 이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $\overline{PT}^2=2\times(2+4)=12$

$\therefore\ \overline{PT}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})(\because\ \overline{PT}>0)$

24 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$의 연장선이 원과 만나는 점을 B라 하고 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로

$15^2=9\times(9+2r)$, $18r=144$

$\therefore\ r=8$

$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi\times 8^2=64\pi$

25 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로

$\overline{PT}^2=4\times(4+12)=64\qquad\therefore\ \overline{PT}=8(\because\ \overline{PT}>0)$

$\triangle PTA$와 $\triangle PBT$에서 $\angle PTA=\angle PBT$이고, $\angle P$는 공통이므로 $\triangle PTA\sim\triangle PBT$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{PA}:\overline{PT}=\overline{TA}:\overline{BT}$이므로

$4:8=x:12$, $8x=48\qquad\therefore\ x=6$

26 $\overline{PT}$가 세 점 A, B, T를 지나는 원의 접선이 되려면 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이어야 하므로

$5^2=\overline{PA}\times 10\qquad\therefore\ \overline{PA}=\frac{5}{2}\,(\text{cm})$

27 원 O에서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로

$\overline{PT}^2=8\times(8+10)=144\qquad\therefore\ \overline{PT}=12(\because\ \overline{PT}>0)$

원 O′의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$144=6\times(6+2r)\qquad\therefore\ r=9$

따라서 $\overline{PO'}=\overline{PC}+\overline{CO'}=6+9=15$이므로

$\overline{PT}+\overline{PO'}=12+15=27$

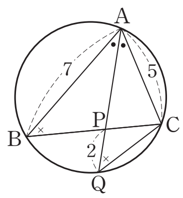
28 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BQ}$이므로 $\angle ACB=\angle BAQ$

즉, $\overline{AB}$는 세 점 A, P, C를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{AB}^2=\overline{BP}\cdot\overline{BC}$이므로

$\overline{AB}^2=4\times(4+5)=36\qquad\therefore\ \overline{AB}=6(\because\ \overline{AB}>0)$

29 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CQ}$를 그으면



$\triangle ABP$와 $\triangle AQC$에서

$\angle BAP=\angle QAC$이고,

$\angle ABP=\angle AQC$ ($\widehat{AC}$에 대한 원주각)

이므로 $\triangle ABP \backsim \triangle AQC$ (AA 닮음)

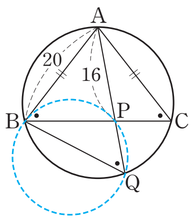
따라서 $\overline{AP}=x$라 하면

$\overline{AB}:\overline{AQ}=\overline{AP}:\overline{AC}$이므로

$7:(x+2)=x:5,\ x^2+2x-35=0$

$(x+7)(x-5)=0 \qquad \therefore x=5(\because x>0)$

30 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는



이등변삼각형이므로 $\angle ABC=\angle ACB$

$\overline{BQ}$를 그으면

$\angle ACB=\angle AQB$ ($\widehat{AB}$에 대한 원주각)

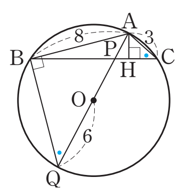
이므로 $\angle ABP=\angle BQP$

즉, $\overline{AB}$는 세 점 B, P, Q를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{AB}^2=\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$이므로

$20^2=16\times(16+\overline{PQ}) \qquad \therefore \overline{PQ}=9$

31 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BQ}$를 그으면



$\triangle ABQ$와 $\triangle AHC$에서

$\angle ABQ=\angle AHC=90^\circ$이고,

$\angle AQB=\angle ACB$ ($\widehat{AB}$에 대한 원주각)

이므로 $\triangle ABQ \backsim \triangle AHC$ (AA 닮음)

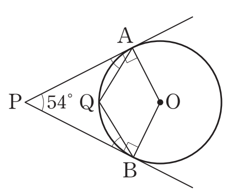
$\overline{AB}:\overline{AH}=\overline{AQ}:\overline{AC}$에서

$8:\overline{AH}=(6+6):3 \qquad \therefore \overline{AH}=2$

STEP 2 내신 5% 따라잡기 P. 93~100

1 63° **2** $(12+4\sqrt{3})\,cm^2$ **3** 40° **4** ②
5 $7\sqrt{2}$ cm **6** 6π cm **7** ④ **8** 8 **9** 20°
10 125° **11** 360° **12** 80° **13** 16° **14** 117°
15 □FBCE, □ABDE, □AFDC, □AFHE, □FBDH, □HDCE
16 35° **17** ⑤ **18** 84° **19** 109° **20** $12\pi\ cm^2$
21 35° **22** $95\sqrt{2}$ **23** 6 **24** ④ **25** 8 **26** ④
27 3 **28** ③ **29** 112° **30** $\frac{10}{3}$ **31** ④ **32** 8
33 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm **34** $4\sqrt{3}$ **35** 41π **36** ② **37** 5 cm
38 $4\sqrt{5}$ **39** ② **40** $6\sqrt{2}$ cm **41** $2\sqrt{10}$ cm
42 $4\sqrt{3}$ **43** 28 **44** $(150\pi+100)\,m^2$ **45** 4개

1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$를 그으면



$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$이므로

□APBO에서

$\angle AOB=360^\circ-(90^\circ+54^\circ+90^\circ)$

$=126^\circ$

이때 $\angle AQB=\frac{1}{2}\times(360^\circ-126^\circ)=117^\circ$이므로

□AQBO에서

$\angle OAQ+\angle OBQ=360^\circ-(126^\circ+117^\circ)=117^\circ$

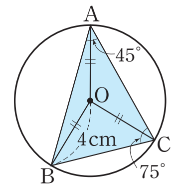
$\therefore \angle PAQ+\angle PBQ$

$=(90^\circ-\angle OAQ)+(90^\circ-\angle OBQ)$

$=180^\circ-(\angle OAQ+\angle OBQ)$

$=180^\circ-117^\circ=63^\circ$

2 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서



$\angle ABC=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

$\overline{OA}$, $\overline{OC}$를 그으면

$\angle AOB=2\angle ACB=2\times75^\circ=150^\circ$,

$\angle BOC=2\angle BAC=2\times45^\circ=90^\circ$,

$\angle AOC=2\angle ABC=2\times60^\circ=120^\circ$

이므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin(180^\circ-150^\circ)$

$=8\sin30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4\,(cm^2)$

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin90^\circ$

$=8\sin90^\circ=8\times1=8\,(cm^2)$

$\triangle OCA=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=8\sin60^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,(cm^2)$

$\therefore \triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=4+8+4\sqrt{3}$

$=12+4\sqrt{3}\,(cm^2)$

3 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 현의 길이는 같으므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

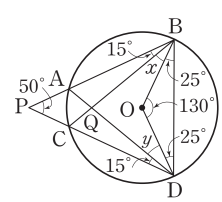
즉, $\triangle ABC$는 정삼각형이므로

$\angle BA'C=\angle BAC=60^\circ$

따라서 $\angle BCA'=80^\circ$이므로 $\triangle A'BC$에서

$\angle A'BC=180^\circ-(60^\circ+80^\circ)=40^\circ$

4 오른쪽 그림에서



$\angle DAB=\angle DCB$

$=\frac{1}{2}\angle DOB$

$=\frac{1}{2}\times130^\circ=65^\circ$

$\triangle BPC$에서 $65^\circ=50^\circ+\angle PBC$

$\therefore \angle PBC=15^\circ$

$\therefore \angle ADC=\angle ABC=15^\circ$ ($\widehat{AC}$에 대한 원주각)

$\overline{BD}$를 그으면 $\triangle BOD$에서 $\overline{OB}=\overline{OD}$이므로

$\angle ODB=\angle OBD=\frac{1}{2}\times(180^\circ-130^\circ)=25^\circ$

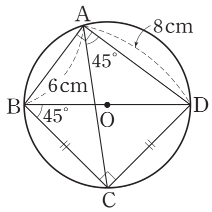
따라서 $\triangle BCD$에서

$(\angle x+25^\circ)+65^\circ+(15^\circ+\angle y+25^\circ)=180^\circ$

$\angle x+\angle y+130^\circ=180^\circ$

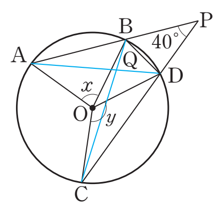
$\therefore \angle x+\angle y=50^\circ$

5 오른쪽 그림에서 $\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$
이므로 $\triangle ABD$에서
$\overline{BD}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,(cm)$



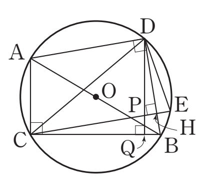
$\triangle BCD$에서
$\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=\overline{BD}^2=10^2=100$
$\therefore\ \overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,(cm)$
$(\because\ \overline{BC}>0,\ \overline{CD}>0)$
이때 $\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$
$=\left(\frac{1}{2}\times6\times8\right)+\left(\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\right)$
$=49\,(cm^2)$ $\cdots$ ㉠
이고 $\overline{BC}=\overline{CD}$이므로
$\angle BAC=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times90^\circ=45^\circ$
$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$
$=\left(\frac{1}{2}\times6\times\overline{AC}\times\sin45^\circ\right)+\left(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times8\times\sin45^\circ\right)$
$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\overline{AC}+2\sqrt{2}\,\overline{AC}=\frac{7\sqrt{2}}{2}\overline{AC}$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $49=\frac{7\sqrt{2}}{2}\overline{AC}$ $\quad\therefore\ \overline{AC}=7\sqrt{2}\,(cm)$

6 오른쪽 그림과 같이
$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 긋고
$\angle AOB=\angle x$, $\angle COD=\angle y$라 하면
원 O의 반지름의 길이가 9 cm이고
$\widehat{AB}=4\pi$ cm, $\widehat{CD}=6\pi$ cm이므로



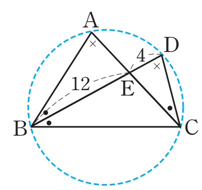
$2\pi\times9\times\frac{x}{360}=4\pi$에서 $\angle x=80^\circ$
$\therefore\ \angle AOB=80^\circ$
$2\pi\times9\times\frac{y}{360}=6\pi$에서 $\angle y=120^\circ$ $\quad\therefore\ \angle COD=120^\circ$
$\therefore\ \angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times80^\circ=40^\circ$,
$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$
$\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 교점을 Q라 하면 $\triangle BQD$에서
$\angle BQD=180^\circ-(40^\circ+60^\circ)=80^\circ$
이때 $\angle ADC=\angle\alpha$라 하면 $\triangle ADP$에서
$\angle\alpha=40^\circ+\angle PAD$ $\quad\therefore\ \angle PAD=\angle\alpha-40^\circ$
이때 $\widehat{BD}$에 대하여 $\angle BCD=\angle BAD=\angle\alpha-40^\circ$이므로
$\triangle CDQ$에서 $80^\circ=(\angle\alpha-40^\circ)+\angle\alpha$, $2\angle\alpha=120^\circ$
$\therefore\ \angle\alpha=60^\circ$
따라서 $\angle AOC=2\angle ADC=2\angle\alpha=120^\circ$이므로
$\widehat{AC}=2\pi\times9\times\frac{120}{360}=6\pi\,(cm)$

7 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$를 긋고 점
D에서 $\overline{CB}$에 수선을 그어 $\overline{CH}$, $\overline{CB}$와
만나는 점을 각각 P, Q라 하자.



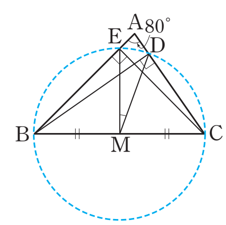
$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$이므로
$\overline{AD}/\!/\overline{CH}$, $\overline{AC}/\!/\overline{DQ}$
즉, $\square ACPD$는 평행사변형이므로
$\overline{AD}=\overline{CP}$ $\cdots$ ㉠
$\triangle CBH$와 $\triangle CPQ$에서 $\angle CHB=\angle CQP=90^\circ$,
$\angle HCB$는 공통이므로 $\triangle CBH\backsim\triangle CPQ$ (AA 닮음)
$\therefore\ \angle CBH=\angle CPQ$
이때 $\overline{DE}$를 그으면 $\angle CBD=\angle CED$이고,
$\angle CPQ=\angle DPH$(맞꼭지각)이므로
$\angle DPH=\angle DEH$
즉, $\triangle DPE$는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ \overline{PH}=\overline{EH}$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AD}+\overline{EH}=\overline{CP}+\overline{PH}=\overline{CH}$
$\square ABED=\triangle ABD+\triangle BED$
$=\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BD}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{EH}\right)$
$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times(\overline{AD}+\overline{EH})$
$=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CH}=\triangle CBD$
따라서 $\triangle CBD$와 넓이가 같은 사각형은 $\square ABED$이다.

8 오른쪽 그림에서 네 점 A, B, C, D가
한 원 위에 있으므로
$\angle BAC=\angle BDC$,
$\angle DCA=\angle DBA$



즉, $\triangle BCD\backsim\triangle CED$ (AA 닮음)이므로
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{ED}$에서
$(12+4):\overline{CD}=\overline{CD}:4$, $\overline{CD}^2=64$
$\therefore\ \overline{CD}=8(\because\ \overline{CD}>0)$

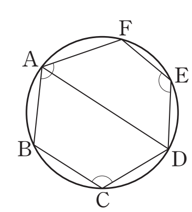
9 오른쪽 그림에서
$\angle BEC=\angle BDC=90^\circ$이므로
네 점 E, B, C, D는 한 원 위에 있다.
이때 $\overline{BC}$가 이 원의 지름이고
$\overline{BM}=\overline{CM}$이므로
점 M은 이 원의 중심이다.



$\triangle ABD$에서 $\angle ABD=180^\circ-(80^\circ+90^\circ)=10^\circ$이므로
$\angle EMD=2\angle EBD=2\times10^\circ=20^\circ$

10 $\overline{AC}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ABC=90^\circ$
$\therefore\ \angle DBC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$
$\triangle PBC$에서 $85^\circ=30^\circ+\angle PCB$ $\quad\therefore\ \angle PCB=55^\circ$
따라서 $\square ABCE$가 원에 내접하므로
$\angle BAE=180^\circ-55^\circ=125^\circ$

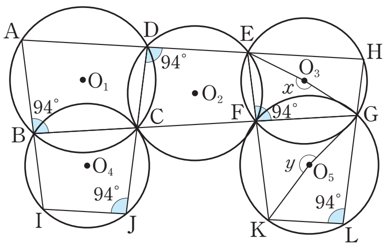
11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면
$\square ABCD$와 $\square ADEF$가 원에 내접하므로
$\angle BAD+\angle C=180^\circ$
$\angle DAF+\angle E=180^\circ$



$\therefore\ \angle A+\angle C+\angle E$
$=(\angle BAD+\angle DAF)+\angle C+\angle E$
$=(\angle BAD+\angle C)+(\angle DAF+\angle E)$
$=180^\circ+180^\circ=360^\circ$

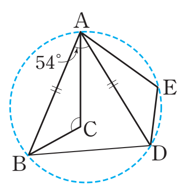
12 □ABCD가 원에 내접하므로 $\angle ABC=180^\circ-\angle x$에서
$\angle CBP=180^\circ-(180^\circ-\angle x)=\angle x$
$\triangle ABQ$에서 $\angle QAB=\angle x-25^\circ$이므로
$\triangle DAP$에서 $\angle x+(\angle x-25^\circ)+45^\circ=180^\circ$
$2\angle x=160^\circ \qquad \therefore \angle x=80^\circ$

13



위의 그림에서 □ABCD, □BIJC는 각각 원에 내접하므로
$\angle CJI=180^\circ-\angle CBI=\angle ABC$
마찬가지로 □DCFE, □EFGH, □FKLG는 각각 원에 내접하므로
$\angle CDE=\angle EFG=\angle GLK=94^\circ$
원 O_5에서 $\angle y=2\angle GLK=2\times 94^\circ=188^\circ$
원 O_3에서 $\angle EHG=180^\circ-94^\circ=86^\circ$이므로
$\angle x=2\angle EHG=2\times 86^\circ=172^\circ$
$\therefore \angle y-\angle x=188^\circ-172^\circ=16^\circ$

14 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC\equiv\triangle ADE$이므로



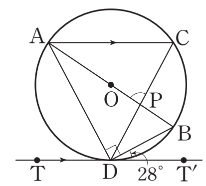
$\overline{AB}=\overline{AD}$
$\overline{BD}$를 그으면
$\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로
$\angle ABD=\angle ADB$
$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-54^\circ)=63^\circ$
이때 □ABDE는 원에 내접하므로
$\angle AED=180^\circ-\angle ABD=180^\circ-63^\circ=117^\circ$
$\therefore \angle C=\angle AED=117^\circ$

15 (i) 한 선분에 대하여 같은 쪽에 있는 각의 크기가 같은 경우,
$\angle BFC=\angle BEC=90^\circ$이므로 □FBCE는 원에 내접한다.
$\angle AEB=\angle ADB=90^\circ$이므로 □ABDE는 원에 내접한다.
$\angle AFC=\angle ADC=90^\circ$이므로 □AFDC는 원에 내접한다.
(ii) 마주 보는 두 각의 크기의 합이 180°인 경우,
$\angle AFH+\angle AEH=180^\circ$이므로 □AFHE는 원에 내접한다.
$\angle BFH+\angle BDH=180^\circ$이므로 □FBDH는 원에 내접한다.
$\angle CDH+\angle CEH=180^\circ$이므로 □HDCE는 원에 내접한다.
따라서 (i), (ii)에 의해 원에 내접하는 사각형은
□FBCE, □ABDE, □AFDC, □AFHE, □FBDH, □HDCE이다.

16 $\angle PCB=125^\circ$이므로 $\angle PCA=180^\circ-125^\circ=55^\circ$
$\therefore \angle APQ=\angle PCA=55^\circ$
$\overline{AC}$가 작은 반원의 지름이므로 $\angle APC=90^\circ$
$\therefore \angle CPB=180^\circ-(55^\circ+90^\circ)=35^\circ$
$\triangle PCB$에서 $\angle CBP=180^\circ-(35^\circ+125^\circ)=20^\circ$
$\therefore \angle APQ-\angle CBP=55^\circ-20^\circ=35^\circ$

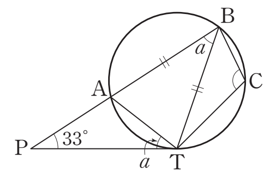
17 $\triangle FEC$는 $\overline{CE}=\overline{CF}$인 이등변삼각형이므로
$\angle FEC=\angle EFC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-48^\circ)=66^\circ$
$\angle DEB=\angle DFE=\angle x$이므로
$\angle DEB+\angle DEF+\angle FEC=180^\circ$에서
$\angle x+53^\circ+66^\circ=180^\circ \qquad \therefore \angle x=61^\circ$

18 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면



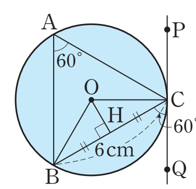
$\angle BAD=\angle BDT'=28^\circ$이고
$\angle ADB=90^\circ$
따라서 $\triangle ADB$에서
$\angle ABD=180^\circ-(28^\circ+90^\circ)=62^\circ$
$\angle ACD=\angle ADT=\angle ABD=62^\circ$이고
$\overline{AC}\,/\!/\,\overleftrightarrow{TT'}$이므로
$\angle CAD=\angle ADT=62^\circ$(엇각), $\angle CAP=62^\circ-28^\circ=34^\circ$
따라서 $\triangle APC$에서 $\angle APC=180^\circ-(34^\circ+62^\circ)=84^\circ$

19 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AT}$를 긋고



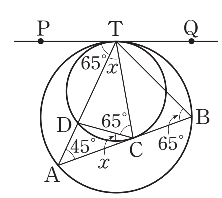
$\angle ATP=\angle a$라 하면
$\angle ABT=\angle ATP=\angle a$
$\triangle APT$에서 $\angle BAT=33^\circ+\angle a$
$\overline{AB}=\overline{BT}$이므로
$\angle BTA=\angle BAT=33^\circ+\angle a$
$\triangle ATB$에서 $(33^\circ+\angle a)+(33^\circ+\angle a)+\angle a=180^\circ$
$3\angle a=114^\circ \qquad \therefore \angle a=38^\circ$
따라서 $\angle BAT=33^\circ+38^\circ=71^\circ$이고 □ATCB는 원에 내접하므로 $\angle BCT=180^\circ-71^\circ=109^\circ$

20 오른쪽 그림에서



$\angle BAC=\angle BCQ=60^\circ$이므로
$\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면
$\angle BOC=2\angle BAC=2\times 60^\circ=120^\circ$
$\overline{OB}=\overline{OC}$이므로
$\angle OBC=\angle OCB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$
원 O의 중심에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{BH}=\overline{CH}=\frac{1}{2}\times 6=3\,(\text{cm})$
이때 $\triangle OBH$에서 $\overline{OB}=\frac{\overline{BH}}{\cos 30^\circ}=3\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$
$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi\times(2\sqrt{3})^2=12\pi\,(\text{cm}^2)$

21 오른쪽 그림에서



$\angle PTA=\angle TBA=65^\circ$
$\overline{TA}$와 작은 원의 교점을 D라 하고
$\overline{CD}$를 그으면
$\angle TCD=\angle PTD=65^\circ$
$\angle ATC=\angle x$라 하면
현 AB가 작은 원의 접선이므로 $\angle DCA=\angle DTC=\angle x$
따라서 $\triangle TAC$에서 $\angle x+45^\circ+(\angle x+65^\circ)=180^\circ$
$2\angle x=70^\circ \qquad \therefore \angle x=35^\circ$

22 $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$이므로

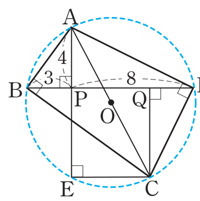
$6\times(4+10)=\overline{PB}\times12$ $\quad\therefore\ \overline{PB}=7$

$\therefore\ \square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin(180^\circ-135^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times20\times19\times\sin45^\circ$

$=190\times\frac{\sqrt{2}}{2}=95\sqrt{2}$

23 오른쪽 그림에서 $\square ABCD$는 $\angle B+\angle D=180^\circ$이므로 원에 내접한다. 이 원을 O라 하면 $\angle ABC=90^\circ$이므로 $\overline{AC}$는 원 O의 지름이다.



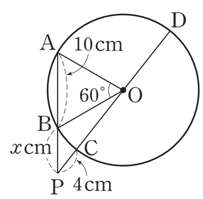
이때 $\overline{AP}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 E라 하면 $\angle AEC=90^\circ$

또 $\overline{CE}$를 그으면 $\square PECQ$는 직사각형이므로 $\overline{CQ}=\overline{PE}$

따라서 $\overline{AP}\cdot\overline{PE}=\overline{BP}\cdot\overline{DP}$에서

$4\cdot\overline{PE}=3\cdot8$ $\quad\therefore\ \overline{CQ}=\overline{PE}=6$

24 오른쪽 그림에서 $\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이고 $\angle AOB=60^\circ$이므로



$\angle OAB=\angle OBA$

$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$

즉, $\triangle OAB$는 정삼각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}=10\,\text{cm}$

따라서 $\overline{OC}$의 연장선과 원 O의 교점을 D라 하면

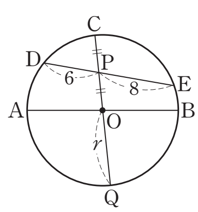
$\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OA}=10\,\text{cm}$이므로

$\overline{PB}=x\,\text{cm}$라 하면 $\overline{PB}\cdot\overline{PA}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$에서

$x(x+10)=4\times(4+10+10)$, $x^2+10x-96=0$

$(x+16)(x-6)=0$ $\quad\therefore\ x=6(\because\ x>0)$

25 오른쪽 그림과 같은 원 O에서 $\overline{CO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 Q라 하고, 반원 O의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{OC}=\overline{OQ}=r$, $\overline{PC}=\overline{PO}=\frac{1}{2}r$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PO}+\overline{OQ}=\frac{1}{2}r+r=\frac{3}{2}r$

$\overline{PC}\cdot\overline{PQ}=\overline{PD}\cdot\overline{PE}$이므로 $\frac{1}{2}r\times\frac{3}{2}r=6\times8$

$r^2=64$ $\quad\therefore\ r=8(\because\ r>0)$

26 $\overline{OC}=x$라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OD}=\overline{OG}=x+8$,

$\overline{OE}=\overline{OF}=(x+8)-6=x+2$

원 O′에서 $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=\overline{OE}\cdot\overline{OF}$이므로 $(x+8)\times x=(x+2)^2$

$x^2+8x=x^2+4x+4$, $4x=4$ $\quad\therefore\ x=1$

이때 원 O의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=x+8=1+8=9$

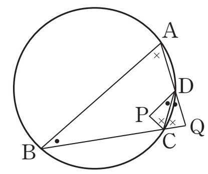
또 $\overline{AC}=(x+8)+x=2x+8=10$이므로

원 O′의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times10=5$

따라서 두 원 O, O′의 둘레의 길이의 차는

$2\pi\times9-2\pi\times5=18\pi-10\pi=8\pi$

27 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$의 연장선의 교점을 Q라 하면



$\square ABCD$가 원에 내접하므로

$\angle QDC=\angle ABC$, $\angle QCD=\angle BAD$

$\triangle DPC$와 $\triangle DQC$에서

$\angle DCP=\angle DCQ$, $\angle PDC=\angle QDC$이고

$\overline{CD}$는 공통이므로 $\triangle DPC\equiv\triangle DQC$ (ASA 합동)

$\therefore\ \overline{QD}=\overline{PD}=5$

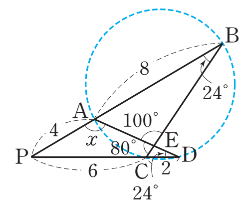
이때 $\overline{QD}\cdot\overline{QA}=\overline{QC}\cdot\overline{QB}$이므로 $\overline{QC}=x$라 하면

$5\times(5+7)=x(x+17)$, $x^2+17x-60=0$

$(x+20)(x-3)=0$ $\quad\therefore\ x=3(\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{PC}=\overline{QC}=3$

28 오른쪽 그림에서



$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=4\times(4+8)=48$이고

$\overline{PC}\cdot\overline{PD}=6\times(6+2)=48$

즉, $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

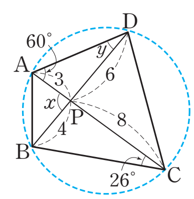
네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

따라서 $\angle ABC=\angle ADC=24^\circ$ ($\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각)이고

$\angle AEB=180^\circ-80^\circ=100^\circ$이므로 $\triangle AEB$에서

$\angle x=24^\circ+100^\circ=124^\circ$

29 오른쪽 그림에서 $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=3\times8=24$이고



$\overline{PB}\cdot\overline{PD}=4\times6=24$

즉, $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$이므로

네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

$\therefore\ \angle y=\angle ACB=26^\circ$

($\overset{\frown}{AB}$에 대한 원주각)

또 $\triangle ADP$에서

$\angle x=\angle y+60^\circ=26^\circ+60^\circ=86^\circ$

$\therefore\ \angle x+\angle y=86^\circ+26^\circ=112^\circ$

30 $\overline{OC}=\overline{OO'}-\overline{O'C}=9-7=2$이므로

$\overline{PC}=x$라 하면

$\overline{PB}=\overline{OB}-(\overline{OC}+\overline{PC})=8-(2+x)=6-x$

$\overline{PA}=\overline{AO}+\overline{OC}+\overline{PC}=8+2+x=10+x$

$\overline{PD}=\overline{CD}-\overline{PC}=7\times2-x=14-x$

이때 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로 $(10+x)(6-x)=x(14-x)$

$60-4x-x^2=14x-x^2$, $18x=60$

$\therefore\ x=\frac{10}{3}$

31 $\overline{PT}$, $\overline{PQ}$는 원 O′의 접선이므로 $\overline{PQ}=\overline{PT}=8\,\text{cm}$

원 O에서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로

$8^2=\overline{PA}\times(8+8)$ $\quad\therefore\ \overline{PA}=4\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{AQ}=\overline{PQ}-\overline{PA}=8-4=4\,(\text{cm})$

32 $\overline{QA}\cdot\overline{QB}=\overline{QC}\cdot\overline{QT}$이므로 $\overline{QA}\times4=2\times6$ $\quad\therefore\ \overline{QA}=3$

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로 $\overline{PT}^2=9\times(9+3+4)=144$

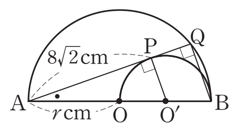
$\therefore\ \overline{PT}=12(\because\ \overline{PT}>0)$

$\triangle$PTA와 $\triangle$PBT에서 $\angle$PTA$=\angle$PBT이고, $\angle$P는 공통이므로 $\triangle \mathrm{PTA} \backsim \triangle \mathrm{PBT}$(AA 닮음)

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{TA}}:\overline{\mathrm{BT}}$이므로 $9:12=6:x$

$9x=72 \qquad \therefore x=8$

33 오른쪽 그림과 같이 반원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{AO}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$(8\sqrt{2})^2=r\times 2r,\ r^2=64$

$\therefore r=8(\because r>0)$

$\overline{\mathrm{O'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}$를 그으면 $\triangle$AO′P와 $\triangle$ABQ에서

$\angle \mathrm{APO'}=\angle \mathrm{AQB}=90^\circ$이고, $\angle$A는 공통이므로

$\triangle \mathrm{AO'P} \backsim \triangle \mathrm{ABQ}$(AA 닮음)

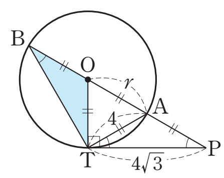
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AO'}}:\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$8\sqrt{2}:\overline{\mathrm{AQ}}=(8+4):(8+8)$

$12\overline{\mathrm{AQ}}=128\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{\mathrm{AQ}}=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ (cm)

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}-8\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ (cm)

34 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{PT}}$가 원 O의 접선이므로 $\angle \mathrm{ATP}=\angle \mathrm{ABT}$



즉, $\angle \mathrm{ATP}=\angle \mathrm{APT}$이므로

$\triangle$ATP는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AT}}=4$

$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$이므로 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$(4\sqrt{3})^2=4\times(4+2r),\ 48=16+8r \qquad \therefore r=4$

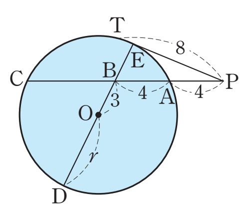
즉, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OT}}=\overline{\mathrm{AT}}=4$이므로 $\triangle$OTA는 정삼각형이다.

따라서 $\angle \mathrm{AOT}=60^\circ$이므로 $\angle \mathrm{BOT}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\therefore \triangle \mathrm{OBT}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times \sin(180^\circ-120^\circ)$

$=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

35 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$의 연장선과 원 O가 만나는 점을 각각 C, D, E라 하면



$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PC}}$이므로

$8^2=4\times(4+4+\overline{\mathrm{BC}})$

$4\overline{\mathrm{BC}}=32 \qquad \therefore \overline{\mathrm{BC}}=8$

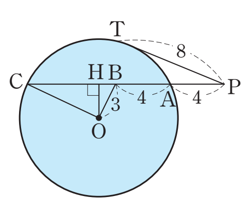
이때 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}=r$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}=r+3$, $\overline{\mathrm{BE}}=r-3$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BD}}\cdot\overline{\mathrm{BE}}$에서 $8\times 4=(r+3)(r-3)$

$32=r^2-9 \qquad \therefore r^2=41$

$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi\times 41=41\pi$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PB}}$의 연장선과 원 O가 만나는 점을 C라 하면 $\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PC}}$이므로



$8^2=4\times(4+4+\overline{\mathrm{BC}})$

$4\overline{\mathrm{BC}}=32 \qquad \therefore \overline{\mathrm{BC}}=8$

원 O의 중심에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

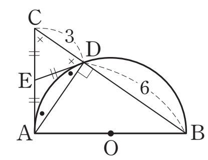
$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{2}\times(4+8)=6,\ \overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{AB}}=6-4=2$

따라서 $\triangle$OBH에서 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

이때 $\overline{\mathrm{OC}}$를 그으면 $\triangle$OHC에서 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+6^2}=\sqrt{41}$

$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi\times(\sqrt{41})^2=41\pi$

36 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{EA}}$, $\overline{\mathrm{ED}}$는 반원 O의 접선이므로 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$ $\qquad \cdots$ ㉠



$\therefore \angle \mathrm{EAD}=\angle \mathrm{EDA}$

한편 $\overline{\mathrm{AB}}$는 반원 O의 지름이므로 $\overline{\mathrm{AD}}$를 그으면 $\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{ADC}=90^\circ$

$\therefore \angle \mathrm{EDC}=90^\circ-\angle \mathrm{EDA}=90^\circ-\angle \mathrm{EAD}$

$=90^\circ-\angle \mathrm{CAD}=\angle \mathrm{ACD}$

$=\angle \mathrm{ECD}$

즉, $\angle \mathrm{EDC}=\angle \mathrm{ECD}$이므로

$\triangle$EDC는 $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{ED}}$인 이등변삼각형이다. $\qquad \cdots$ ㉡

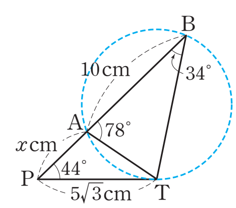
따라서 ㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CA}}$이고 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CD}}\cdot\overline{\mathrm{CB}}$이므로

$\overline{\mathrm{CA}}^2=3\times(3+6)=27 \qquad \therefore \overline{\mathrm{CA}}=3\sqrt{3}(\because \overline{\mathrm{CA}}>0)$

$\therefore \overline{\mathrm{EA}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CA}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

37 오른쪽 그림의 $\triangle$APT에서



$\angle \mathrm{ATP}=78^\circ-44^\circ=34^\circ$

즉, $\angle \mathrm{ATP}=\angle \mathrm{ABT}=34^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{PT}}$는 세 점 A, B, T를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=x$ cm라 하면

$(5\sqrt{3})^2=x(x+10),\ x^2+10x-75=0$

$(x-5)(x+15)=0 \qquad \therefore x=5(\because x>0)$

38 원 $\mathrm{O_1}$의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi\times r^2=64\pi$에서 $r^2=64 \qquad \therefore r=8(\because r>0)$

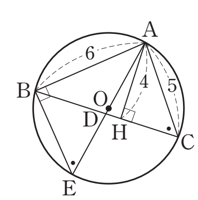
$\therefore \overline{\mathrm{AO_1}}=\overline{\mathrm{BO_1}}=8$

이때 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PC}}$이고 $\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{PA}}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{PA}}=4\times(4+8+8)=80$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=4\sqrt{5}(\because \overline{\mathrm{PF}}>0)$

39 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BE}}$를 그으면



$\triangle$ABE와 $\triangle$AHC에서

$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{AHC}=90^\circ$이고,

$\angle \mathrm{BEA}=\angle \mathrm{HCA}$이므로

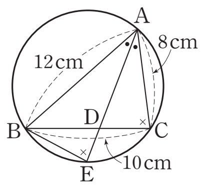
$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{AHC}$(AA 닮음)

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$6:4=\overline{\mathrm{AE}}:5,\ 4\overline{\mathrm{AE}}=30 \qquad \therefore \overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{15}{2}$

$\therefore$ (원 O의 반지름의 길이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{15}{4}$

40 오른쪽 그림에서 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로 $\triangle ABC$에서



$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

즉, $\overline{BD} : \overline{CD} = 12 : 8 = 3 : 2$이므로

$\overline{BD} = 10 \times \frac{3}{5} = 6\,(\text{cm})$,

$\overline{CD} = 10 \times \frac{2}{5} = 4\,(\text{cm})$

$\overline{AD}$의 연장선과 원의 교점을 E라 하고 $\overline{BE}$를 그은 후

$\overline{AD} = x\,\text{cm}$, $\overline{DE} = y\,\text{cm}$라 하면

$\overline{DA} \cdot \overline{DE} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$이므로 $xy = 6 \times 4 = 24$

$\triangle ABE$와 $\triangle ADC$에서 $\angle BAE = \angle DAC$이고,

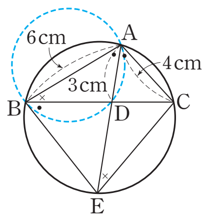
$\angle BEA = \angle DCA$이므로 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AE} : \overline{AC}$이므로 $12 : x = (x+y) : 8$

$x^2 + xy = 96$, $x^2 + 24 = 96$, $x^2 = 72$

$\therefore\ x = 6\sqrt{2}\ (\because\ x > 0)$

41 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CE}$를 그으면



$\triangle ABD$와 $\triangle AEC$에서

$\angle BAD = \angle EAC$이고,

$\angle ABD = \angle AEC$이므로

$\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ (AA 닮음)

이때 $\overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AC}$이므로

$6 : \overline{AE} = 3 : 4$, $3\overline{AE} = 24$

$\therefore\ \overline{AE} = 8\,(\text{cm})$

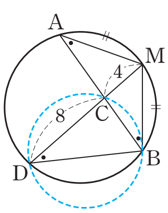
또 $\angle CBE = \angle CAE$이므로 $\angle DBE = \angle DAB$

즉, $\overline{BE}$는 세 점 A, B, D를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{BE}^2 = \overline{ED} \cdot \overline{EA}$이므로

$\overline{BE}^2 = (8-3) \times 8$ $\qquad \therefore\ \overline{BE} = 2\sqrt{10}\,(\text{cm})\ (\because\ \overline{BE} > 0)$

42 오른쪽 그림에서 $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$이므로



$\angle ABM = \angle BAM$

$\overline{DB}$를 그으면 $\angle BAM = \angle BDM$

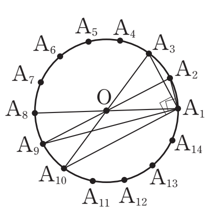
$\therefore\ \angle CDB = \angle CBM$

즉, $\overline{MB}$는 세 점 B, C, D를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$이므로

$\overline{MB}^2 = 4 \times (4+8) = 48$ $\qquad \therefore\ \overline{MB} = 4\sqrt{3}\ (\because\ \overline{MB} > 0)$

43 오른쪽 그림과 같이 원 O의 둘레에 14명의 회원 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_{14}가 서로 이웃한 회원들과의 거리가 같도록 차례로 서있다고 하면 두 회원 A_n과 A_{n+7}(n은 $1 \le n \le 7$인 자연수)은 항상 점 O에 대하여 대칭이 되도록 서있게 된다.



이때 혜경이를 A_1이라 하면 $\triangle A_1A_nA_{n+7}$(n은 $2 \le n \le 7$인 자연수)에서 $\overline{A_nA_{n+7}}$은 원 O의 지름이고 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\triangle A_1A_nA_{n+7}$은 직각삼각형이다.

이때 원 O의 지름의 길이는 2이므로

$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_9}^2 = \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_{10}}^2 = \overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_1A_{11}}^2 = \cdots$

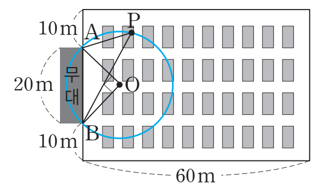
$= \overline{A_1A_7}^2 + \overline{A_1A_{14}}^2 = 4$

이고 $\overline{A_1A_8}^2 = 4$이므로

$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 + \cdots + \overline{A_1A_{14}}^2 = 7 \times 4 = 28$

따라서 혜경이와 각 회원들 사이의 거리의 제곱의 합은 28이다.

44 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P를 지나는 원을 O라 하면



$\angle APB \ge 45^\circ$이므로

$\angle AOB \ge 90^\circ$이다.

$\triangle AOB$에서 $\angle AOB = 90^\circ$일 때 $\overline{OA} = \overline{OB}$이고 $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$이므로

$1 : \sqrt{2} = \overline{OA} : 20$ $\qquad \therefore\ \overline{OA} = 10\sqrt{2}\,(\text{m})$

따라서 특별석을 놓을 수 있는 영역의 넓이는 원 O의 넓이에서 $\overline{AB}$와 $\overset{\frown}{AB}$로 이루어진 활꼴의 넓이를 빼면 된다.

(원 O의 넓이) $= \pi \times (10\sqrt{2})^2 = 200\pi\ (\text{m}^2)$

(활꼴의 넓이) $= \pi \times (10\sqrt{2})^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}$

$= 50\pi - 100\ (\text{m}^2)$

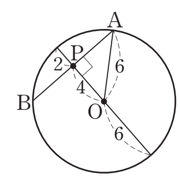
$\therefore$ (특별석을 놓을 수 있는 영역의 넓이) $= 200\pi - (50\pi - 100)$

$= 150\pi + 100\ (\text{m}^2)$

45 점 P를 지나는 현 중에서 그 길이가 가장 긴 경우는 현이 원 O의 지름일 때이므로

$\overline{AB} = 2\overline{OA} = 2 \times 6 = 12$

현의 길이가 가장 짧은 경우는 오른쪽 그림과 같이 현이 원 O의 지름과 수직일 때이므로



$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 2 \times (4+6) = 20$ $\qquad \cdots$ ㉠

$\triangle APO$에서 $\overline{PB} = \overline{PA} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AB} = \overline{PA} + \overline{PB}$이므로

$4\sqrt{5} \le \overline{PA} + \overline{PB} \le 12$, $\sqrt{80} \le \overline{PA} + \overline{PB} \le \sqrt{144}$ $\qquad \cdots$ ㉡

$\overline{PA} > 0$, $\overline{PB} > 0$이고 ㉠에서 두 수의 곱이 20인 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이의 순서쌍은

(1, 20), (20, 1), (2, 10), (10, 2), (4, 5), (5, 4)

이므로 각 경우의 $\overline{PA} + \overline{PB}$의 값은

$1 + 20 = 20 + 1 = 21$, $2 + 10 = 10 + 2 = 12$, $4 + 5 = 5 + 4 = 9$

그런데 (1, 20), (20, 1)은 ㉡을 만족하지 않으므로 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$의 길이가 모두 정수가 되는 순서쌍은 (2, 10), (10, 2), (4, 5), (5, 4)의 4개이다.

따라서 구하는 현 AB의 개수는 4개이다.

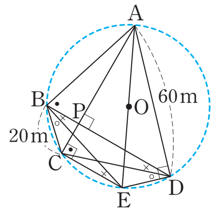
STEP 3 내신 1% 뛰어넘기 P. 101~102

01 $10\sqrt{10}$ m	**02** 150°	**03** $\frac{\sqrt{130}}{3}$	**04** 65°
05 $117\pi\ \text{cm}^2$	**06** $4\sqrt{5}$	**07** 4cm	**08** 2

01 **길잡이** 점 A와 원의 중심을 지나는 선분이 원과 만나는 점을 E라 하고 $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$를 각각 그은 후, 원주각의 성질을 이용하여 □BCED가 등변사다리꼴임을 알아낸다.

$\angle ABD = \angle ACD$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있고 이때 자동 급수 장치를 설치해야 하는 곳은 이 원의 중심이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, $\overline{AO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 E라 하고 $\overline{CE}$, $\overline{DE}$를 그으면 $\overline{AE}$는 원 O의 지름이므로



$\angle ACE=\angle ADE=90^\circ$

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$가 수직으로 만나는 점을 P라 하면

$\angle ACE=\angle APD=90^\circ$(동위각)이므로

$\overline{CE}/\!/\overline{BD}$ ⋯ ㉠

또 $\overline{BE}$를 긋고

$\angle CBE=\angle CDE=\angle a$($\overset{\frown}{CE}$에 대한 원주각),

$\angle BDC=\angle BEC=\angle b$($\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)라 하면

$\angle DBE=\angle BEC=\angle b$(엇각)이므로

$\angle CBD=\angle EDB=\angle a+\angle b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 □BCED는 등변사다리꼴이므로

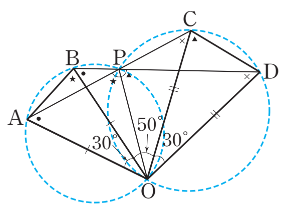
$\overline{DE}=\overline{BC}=20\,\mathrm{m}$

따라서 △AED에서 $\overline{AE}=\sqrt{60^2+20^2}=20\sqrt{10}\,(\mathrm{m})$이므로

(구하는 거리)$=\dfrac{1}{2}\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\times 20\sqrt{10}=10\sqrt{10}\,(\mathrm{m})$

02 길잡이 △AOC≡△BOD임을 이용하여 □AOPB, □PODC가 원에 내접하는 사각형임을 알아낸다.

오른쪽 그림의



△AOC와 △BOD에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{OC}=\overline{OD}$,

$\angle AOC=\angle BOD=80^\circ$이므로

△AOC≡△BOD (SAS 합동)

즉, $\angle OAC=\angle OBD$이므로

□AOPB는 원에 내접한다.

$\therefore \angle APO=\angle ABO=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$

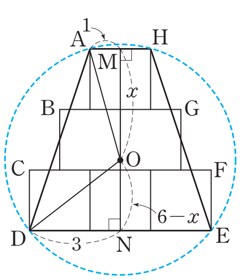
또 $\angle OCA=\angle ODB$이므로 □PODC도 원에 내접한다.

$\therefore \angle OPD=\angle OCD=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$

$\therefore \angle APD=\angle APO+\angle OPD=75^\circ+75^\circ=150^\circ$

03 길잡이 주어진 도형이 선대칭도형이므로 $\overline{AD}$, $\overline{HE}$를 그으면 □ADEH는 등변사다리꼴임을 알아낸다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$와 $\overline{HE}$를 그으면 $\overline{AH}/\!/\overline{DE}$, $\overline{AD}=\overline{HE}$이므로 □ADEH는 등변사다리꼴이다.



$\therefore \angle AHE+\angle ADE$

$=\angle HAD+\angle HED$

$=180^\circ$

따라서 마주 보는 두 각의 크기의 합이 180°이므로 등변사다리꼴 ADEH는 원에 내접한다.

이 원의 중심을 O라 하면 주어진 선대칭도형을 포함하는 가장 작은 원은 $\overline{OA}=\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OH}$를 반지름으로 하는 원 O이다.

원 O의 중심에서 $\overline{AH}$, $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고 $\overline{OM}=x$라 하면 $\overline{MN}=6$이므로 $\overline{ON}=6-x$

이때 △OMA에서 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times 2=1$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{x^2+1^2}$

△ODN에서 $\overline{DN}=\dfrac{1}{2}\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\times 6=3$이므로

$\overline{OD}=\sqrt{3^2+(6-x)^2}$

$\overline{OA}=\overline{OD}$이므로 $\sqrt{x^2+1^2}=\sqrt{3^2+(6-x)^2}$

$x^2+1=9+36-12x+x^2$, $12x=44$

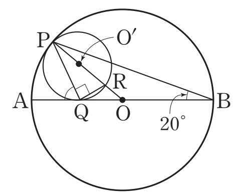
$\therefore x=\dfrac{11}{3}$

따라서 주어진 선대칭도형을 포함하는 가장 작은 원 O의 반지름의 길이는

$\overline{OA}=\sqrt{x^2+1^2}=\sqrt{\left(\dfrac{11}{3}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{130}}{3}$

04 길잡이 △OBP가 이등변삼각형이고, 원 O′의 지름에 대한 원주각의 크기가 90°임을 이용한다.

오른쪽 그림에서 $\overline{OP}=\overline{OB}$이므로



△OBP에서

$\angle OPB=\angle OBP=20^\circ$

$\therefore \angle AOP=20^\circ+20^\circ=40^\circ$

$\overline{OP}$와 원 O′의 교점을 R라 하고

$\overline{QR}$를 그으면 $\angle PQR=90^\circ$

$\angle RQO=\angle a$라 하면 $\angle RPQ=\angle RQO=\angle a$이므로

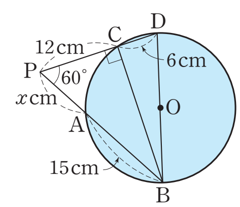
△PQO에서 $\angle a+(90^\circ+\angle a)+40^\circ=180^\circ$

$2\angle a=50^\circ$　　$\therefore \angle a=25^\circ$

$\therefore \angle AQP=180^\circ-(90^\circ+25^\circ)=65^\circ$

05 길잡이 원에서의 선분의 길이 사이의 관계를 이용하여 $\overline{PA}$의 길이를 구하고, 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 $\overline{BD}$가 원 O의 지름임을 알아낸다.

오른쪽 그림에서



$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$\overline{PA}=x\,\mathrm{cm}$라 하면

$x(x+15)=12\times(12+6)$

$x^2+15x-216=0$

$(x+24)(x-9)=0$

$\therefore x=9\,(\because x>0)$

$\overline{BC}$와 $\overline{BD}$를 그으면 △BCP에서 $\angle BPC=60^\circ$이고

$\overline{BP}:\overline{PC}=(15+9):12=2:1$이므로 $\angle BCP=90^\circ$

즉, $\angle BCD=90^\circ$이므로 $\overline{BD}$는 원 O의 지름이다.

△BCP에서 $\overline{BC}=\sqrt{24^2-12^2}=12\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

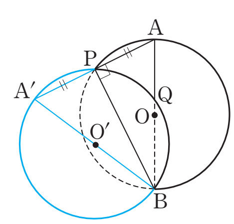
원 O의 반지름의 길이를 $r\,\mathrm{cm}$라 하면 $\overline{BD}=2r\,\mathrm{cm}$이므로

△BDC에서 $(2r)^2=(12\sqrt{3})^2+6^2$　　$\therefore r^2=117$

$\therefore$ (원 O의 넓이)$=\pi\times r^2=117\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

06 길잡이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원과 호 BQP를 일부분으로 하는 원을 그려 본다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원을 O, 호 BQP를 일부분으로 하는 원을 O′이라 하면 원 O′은 원 O와 $\overline{BP}$에 대하여 대칭인 원이다.



$\angle APB$는 지름 AB에 대한 원주각이므로 $\angle APB=90^\circ$

이때 점 A와 $\overline{BP}$에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 세 점 A, P, A′은 한 직선 위에 있고 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이다.

$\overline{AB}=10$이고 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:3$이므로 $\overline{AQ}=10\times\frac{2}{5}=4$

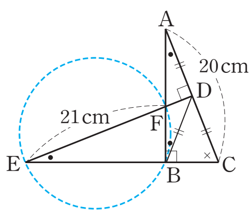
원 O′에서 $\overline{AQ}\cdot\overline{AB}=\overline{AP}\cdot\overline{AA'}$이므로 $\overline{AP}=\overline{A'P}=x$라 하면

$4\times10=x\times2x,\ x^2=20 \qquad \therefore x=2\sqrt{5}(\because x>0)$

따라서 △APB에서

$\overline{BP}=\sqrt{10^2-(2\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$

07 **길잡이** △ABC∽△EDC(AA 닮음)이고, 점 D가 △ABC의 외심임을 이용하여 $\overline{DB}$가 세 점 B, E, F를 지나는 원의 접선임을 알아낸다.



오른쪽 그림의 △ABC와 △EDC에서 ∠ABC=∠EDC=90°이고, ∠C는 공통이므로

△ABC∽△EDC(AA 닮음)

∴ ∠BAC=∠DEC ⋯ ㉠

이때 점 D는 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로 직각삼각형 ABC의 외심이고 $\overline{DB}$를 그으면

$\overline{DB}=\overline{DA}=\overline{DC}=\frac{1}{2}\times20=10\,(\text{cm})$이므로 △ABD는 이등변삼각형이다.

∴ ∠ABD=∠BAD ⋯ ㉡

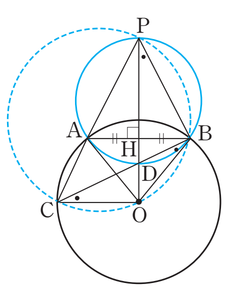
㉠, ㉡에서 ∠FBD=∠FEB이므로 $\overline{DB}$는 세 점 B, E, F를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{DB}^2=\overline{DF}\cdot\overline{DE}$이므로 $\overline{DF}=x\,\text{cm}$라 하면

$10^2=x(x+21),\ x^2+21x-100=0$

$(x+25)(x-4)=0 \qquad \therefore x=4(\because x>0)$

08 **길잡이** $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 긋고, □PCOB가 원에 내접하는 사각형임을 알아낸다.



오른쪽 그림에서 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}$

$\overline{OB}$를 그으면 △AOB는 이등변삼각형이므로 ∠AOH=∠BOH

△PAO와 △PBO에서

$\overline{OA}=\overline{OB}=4$, ∠AOP=∠BOP이고,

$\overline{OP}$는 공통이므로

△PAO≡△PBO(SAS 합동)

∴ ∠OAP=∠OBP

$\overline{OC}$를 그으면 △OAC에서 $\overline{OC}=\overline{OA}=4$이므로

∠OCA=∠OAC

∴ ∠OBP+∠OCP=∠OAP+∠OAC=180°

즉, 마주 보는 두 각의 크기의 합이 180°이므로 □PCOB는 원에 내접하는 사각형이다.

∴ ∠OPB=∠OCB($\overset{\frown}{OB}$에 대한 원주각)

또 $\overline{OB}=\overline{OC}=4$이므로 ∠OBC=∠OCB

즉, ∠OBC=∠DPB이므로 $\overline{OB}$는 세 점 P, B, D를 지나는 원의 접선이다.

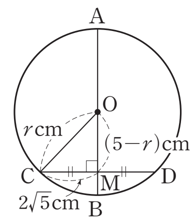
따라서 $\overline{OB}^2=\overline{OD}\cdot\overline{OP}$이므로

$4^2=\overline{OD}\times8 \qquad \therefore \overline{OD}=2$

서술형 완성하기 P. 103~104

1 6 cm	**2** $(52\sqrt{10}-40\pi)\,\text{cm}^2$		**3** 98°
4 $4\sqrt{5}$	**5** 8	**6** 12	**7** 풀이 참조

1 오른쪽 그림에서 원 O의 반지름의 길이를 $r\,\text{cm}$라 하고, $\overline{OC}$를 그으면



$\overline{OA}=\overline{OC}=r\,\text{cm}$이므로

$\overline{OM}=\overline{AM}-\overline{OA}=5-r\,(\text{cm})$ ⋯ (i)

$\overline{AM}\perp\overline{CD}$이므로

$\overline{CM}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}\,(\text{cm})$

△OCM에서

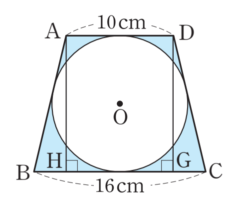
$(5-r)^2+(\sqrt{5})^2=r^2,\ 25-10r+r^2+5=r^2$

$10r=30 \qquad \therefore r=3$ ⋯ (ii)

$\therefore \overline{AB}=2r=2\times3=6\,(\text{cm})$ ⋯ (iii)

채점 기준	배점
(i) 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하고, $\overline{OM}$의 길이를 r에 관하여 나타내기	30 %
(ii) r의 값 구하기	50 %
(iii) $\overline{AB}$의 길이 구하기	20 %

2 $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AD}+\overline{BC}$이므로



$\overline{AB}+\overline{DC}=10+16=26\,(\text{cm})$

□ABCD는 등변사다리꼴이므로

$\overline{AB}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\times26=13\,(\text{cm})$ ⋯ (i)

두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, G라 하면

$\overline{BH}=\overline{CG}=\frac{1}{2}\times(16-10)=3\,(\text{cm})$이므로

△ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{13^2-3^2}=4\sqrt{10}\,(\text{cm})$ ⋯ (ii)

따라서 원 O의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AH}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}=2\sqrt{10}\,(\text{cm})$이므로 ⋯ (iii)

(색칠한 부분의 넓이)

=□ABCD−(원 O의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(10+16)\times4\sqrt{10}-\pi\times(2\sqrt{10})^2$

$=52\sqrt{10}-40\pi\ (\text{cm}^2)$ ⋯ (iv)

채점 기준	배점
(i) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 길이 구하기	30 %
(ii) $\overline{AH}$의 길이 구하기	30 %
(iii) 원 O의 반지름의 길이 구하기	10 %
(iv) 색칠한 부분의 넓이 구하기	30 %

3 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DE}$이므로 ∠ABE=∠DCE=∠$a$라 하면 ⋯ (i)

□ABCD가 원에 내접하므로 ∠ADC+∠ABC=180°

∴ ∠ADC=180°−∠ABC

=180°−(∠a+82°)

=98°−∠a ⋯ (ii)

따라서 $\triangle CDF$에서

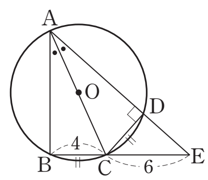
$\angle EFD=\angle FDC+\angle DCF$

$=\angle ADC+\angle DCE$

$=(98^\circ-\angle a)+\angle a=98^\circ$ … (iii)

채점 기준	배점
(i) $\angle ABE=\angle DCE$임을 알아내기	30 %
(ii) $\angle ABE=\angle a$라 할 때, $\angle ADC$를 $\angle a$에 관하여 나타내기	40 %
(iii) $\angle EFD$의 크기 구하기	30 %

4 오른쪽 그림에서 $\widehat{BC}=\widehat{CD}$이므로



$\angle BAC=\angle DAC$

원주각의 크기가 같은 두 호에 대한 중심각의 크기는 같고, 중심각의 크기가 같은 두 현의 길이는 같으므로

$\overline{CD}=\overline{BC}=4$ … (i)

$\overline{AC}$가 원 O의 지름이므로 $\angle ADC=90^\circ$

즉, $\angle CDE=90^\circ$이므로 $\triangle CDE$에서

$\overline{ED}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$ … (ii)

$\overline{EC}\cdot\overline{EB}=\overline{ED}\cdot\overline{EA}$이므로

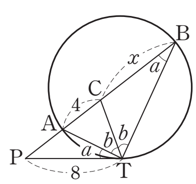
$6\times(6+4)=2\sqrt{5}\times(2\sqrt{5}+\overline{AD})$

$60=20+2\sqrt{5}\times\overline{AD}$

$2\sqrt{5}\times\overline{AD}=40 \qquad \therefore\ \overline{AD}=4\sqrt{5}$ … (iii)

채점 기준	배점
(i) $\overline{CD}$의 길이 구하기	30 %
(ii) $\overline{ED}$의 길이 구하기	20 %
(iii) $\overline{AD}$의 길이 구하기	50 %

5 오른쪽 그림에서 $\overline{PT}$는 원의 접선이므로



$\angle PTA=\angle a$라 하면

$\angle ABT=\angle PTA=\angle a$ … (i)

또 $\angle ATC=\angle CTB=\angle b$라 하면

$\triangle CTB$에서 $\angle PCT=\angle a+\angle b$이므로

$\angle PTC=\angle PCT=\angle a+\angle b$

따라서 $\triangle PTC$는 $\overline{PC}=\overline{PT}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{PC}=\overline{PT}=8$ … (ii)

$\therefore\ \overline{PA}=\overline{PC}-\overline{AC}=8-4=4$ … (iii)

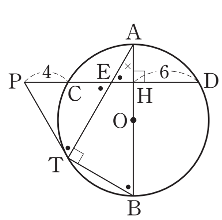
$\overline{PT}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$이므로

$8^2=4\times(8+x),\ 64=32+4x$

$\therefore\ x=8$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) $\angle ABT=\angle PTA$임을 알아내기	20 %
(ii) $\overline{PC}$의 길이 구하기	40 %
(iii) $\overline{PA}$의 길이 구하기	10 %
(iv) x의 값 구하기	30 %

6 오른쪽 그림에서 $\overline{OH}\perp\overline{CD}$이므로



$\overline{CH}=\overline{DH}=6$

$\overline{PT}^2=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$이므로

$\overline{PT}^2=4\times(4+6+6),\ \overline{PT}^2=64$

$\therefore\ \overline{PT}=8\,(\because\ \overline{PT}>0)$ … (i)

$\overline{BT}$를 그으면

$\angle PTA=\angle ABT$ … ㉠

$\triangle ATB$와 $\triangle AHE$에서

$\angle ATB=\angle AHE=90^\circ$이고, $\angle A$는 공통이므로

$\triangle ATB\backsim\triangle AHE$ (AA 닮음)

$\therefore\ \angle ABT=\angle AEH$ … ㉡

또 $\angle AEH=\angle PET$ (맞꼭지각) … ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서 $\angle PTE=\angle PET$이므로 $\triangle PTE$는 $\overline{PE}=\overline{PT}$인 이등변삼각형이다.

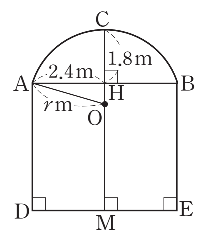
즉, $\overline{PE}=\overline{PT}=8$이므로

$\overline{CE}=\overline{PE}-\overline{PC}=8-4=4$ … (ii)

$\therefore\ \overline{PT}+\overline{CE}=8+4=12$ … (iii)

채점 기준	배점
(i) $\overline{PT}$의 길이 구하기	40 %
(ii) $\overline{CE}$의 길이 구하기	50 %
(iii) $\overline{PT}+\overline{CE}$의 값 구하기	10 %

7 |예시 답안|



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 바닥에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 점 C에서 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 원의 중심 O는 $\overline{CM}$ 위에 있다.

원의 반지름의 길이를 r m라 하면

$\overline{OH}=(r-1.8)$ m이므로

$\triangle OAH$에서

$r^2=\overline{AH}^2+\overline{OH}^2=2.4^2+(r-1.8)^2$

$r^2=5.76+r^2-3.6r+3.24$

$3.6r=9 \qquad \therefore\ r=2.5$ … (i)

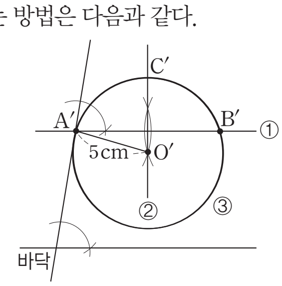
이때 $\frac{1}{50}$로 축소한 $\overline{AB}$, $\overline{CH}$의 길이와 r를 각각 $\overline{A'B'}$, $\overline{C'H'}$, r'이라 하면

$\overline{A'B'}=4.8\times100\times\frac{1}{50}=9.6\,(\text{cm})$,

$\overline{C'H'}=1.8\times100\times\frac{1}{50}=3.6\,(\text{cm})$,

$r'=2.5\times100\times\frac{1}{50}=5\,(\text{cm})$ … (ii)

따라서 $\widehat{ACB}$를 석고 위에 작도하는 방법은 다음과 같다.



① $\overline{A'B'}=9.6$ cm가 되도록 바닥과 평행한 $\overline{A'B'}$을 작도한다.

② 두 점 A′, B′으로부터 반지름의 길이가 5 cm인 원을 각각 그려서 $\overline{A'B'}$의 수선을 작도하고 원의 중심 O′을 찾는다.

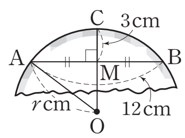
③ 점 O′에서 반지름의 길이가 5 cm인 원을 그리면 $\overline{A'B'}$의 수선과 만나는 점이 C′이므로 $\widehat{A'C'B'}$이 작도하려고 하는 $\widehat{ACB}$이다. … (iii)

채점 기준	배점
(i) 실제 크기의 원의 반지름의 길이 구하기	30 %
(ii) $\frac{1}{50}$의 크기인 $\overline{AB}$, $\overline{CH}$, 원의 반지름의 길이 각각 구하기	각 10 %
(iii) $\widehat{ACB}$를 작도하는 방법 말하기	40 %

단원 마무리하기 P. 105~108

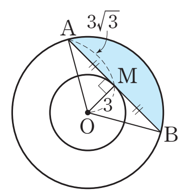
1 $\frac{15}{2}$ cm **2** ③ **3** ④ **4** ⑤ **5** 3
6 50°, 과정은 풀이 참조 **7** ② **8** ③ **9** ②
10 ④ **11** 60° **12** 10 **13** ③ **14** 74°
15 10°, 과정은 풀이 참조 **16** ② **17** ③ **18** 69°
19 $2\sqrt{5}$ cm **20** ⑤ **21** ④ **22** ② **23** ③
24 ⑤ **25** $2+\sqrt{15}$ **26** 3

1 오른쪽 그림과 같이 원 모양의 접시의 중심을 O라 하면 $\overline{CM}$의 연장선은 점 O를 지난다.



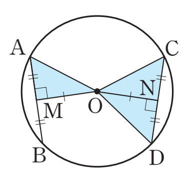
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times12=6\,(cm)$이므로
$\overline{AO}=r$cm라 하면 △AOM에서
$6^2+(r-3)^2=r^2 \qquad \therefore r=\frac{15}{2}$
따라서 접시의 반지름의 길이는 $\frac{15}{2}$ cm이다.

2 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}$는 작은 원의 접선이므로 그 접점을 M이라 하면



$\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
$\overline{OA}$를 그으면 △AOM에서
$\overline{AO}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$
$\overline{AO}:\overline{OM}=6:3=2:1$이므로 $\angle AOM=60°$
$\overline{OB}$를 그으면 △OAM≡△OBM(SAS 합동)이므로
$\angle BOM=\angle AOM=60°$
따라서 $\angle AOB=2\angle AOM=2\times60°=120°$이므로
(색칠한 부분의 넓이)=(부채꼴 AOB의 넓이)−△AOB
$=\pi\times6^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times3$
$=12\pi-9\sqrt{3}$

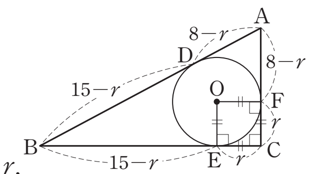
3 오른쪽 그림에서 $\overline{OM}\perp\overline{AB}$이므로



$\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\times8=4\,(cm)$
$\overline{OA}=4\sqrt{3}$cm이므로
△OAM에서
$\overline{OM}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4^2}=4\sqrt{2}\,(cm)$
이때 원 O의 중심에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 N이라 하면
$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{ON}=\overline{OM}=4\sqrt{2}$ cm
$\therefore$ △OAM+△ODC$=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{2}$
$=8\sqrt{2}+16\sqrt{2}=24\sqrt{2}\,(cm^2)$

4 $\overline{OR}=\overline{OP}=5$cm이므로 $\overline{OA}=5+8=13\,(cm)$
$\overline{AP}$는 원 O의 접선이므로 $\angle APO=90°$
△PAO에서 $\overline{AP}=\sqrt{13^2-5^2}=12\,(cm)$
한편 $\overline{AQ}=\overline{AP}$, $\overline{BQ}=\overline{BR}$, $\overline{CP}=\overline{CR}$이므로
(△ABC의 둘레의 길이)$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=\overline{AB}+(\overline{BR}+\overline{CR})+\overline{CA}$
$=(\overline{AB}+\overline{BQ})+(\overline{AC}+\overline{CP})$
$=\overline{AQ}+\overline{AP}$
$=2\overline{AP}$
$=2\times12=24\,(cm)$

5 $\overline{AC}=\sqrt{17^2-15^2}=8$
오른쪽 그림에서 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

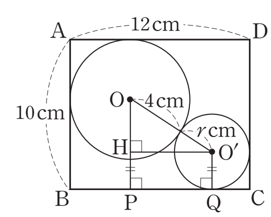


□OECF는 정사각형이므로
$\overline{CE}=\overline{CF}=r$, $\overline{AD}=\overline{AF}=8-r$,
$\overline{BD}=\overline{BE}=15-r$
$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=17$에서
$(8-r)+(15-r)=17 \qquad \therefore r=3$

6 $\overline{PA}=\overline{PQ}=\overline{PB}$이므로 △PAQ와 △PQB는 각각 이등변삼각형이다.
즉, $\angle PQA=\angle PAQ=50°$이므로 … (i)
△PAQ에서 $\angle BPQ=50°+50°=100°$ … (ii)
$\therefore \angle PBQ=\angle PQB=\frac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$ … (iii)
이때 $\overline{PB}$는 원 O′의 접선이므로 $\angle PBO'=90°$
$\therefore \angle QBO'=\angle PBO'-\angle PBQ$
$=90°-40°=50°$ … (iv)

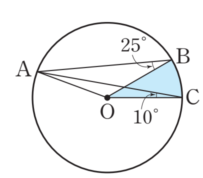
채점 기준	배점
(i) ∠PQA의 크기 구하기	30 %
(ii) ∠BPQ의 크기 구하기	20 %
(iii) ∠PBQ, ∠PQB의 크기 구하기	20 %
(iv) ∠QBO′의 크기 구하기	30 %

7 오른쪽 그림과 같이 원 O, O′의 중심에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 원 O′의 중심에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



원 O의 반지름의 길이가 4cm이므로 원 O′의 반지름의 길이를 $r$cm라 하면
$\overline{OO'}=(4+r)$cm, $\overline{OP}=10-4=6\,(cm)$,
$\overline{OH}=\overline{OP}-\overline{HP}=6-r\,(cm)$,
$\overline{O'H}=\overline{PQ}=12-4-r=8-r\,(cm)$
따라서 △OHO′에서 $(6-r)^2+(8-r)^2=(4+r)^2$
$r^2-36r+84=0 \qquad \therefore r=18-4\sqrt{15}\,(\because 0<r<5)$

8 $\overline{OA}$를 그으면 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}$이므로



$\angle OAC=\angle OCA=10°$,
$\angle OAB=\angle OBA=25°$
따라서 $\angle BAC=25°-10°=15°$이므로
$\angle BOC=2\angle BAC=2\times15°=30°$
$\therefore$ (부채꼴 BOC의 넓이)$=\pi\times6^2\times\frac{30}{360}=3\pi\,(cm^2)$

9 $\angle ADC=\angle ABC=\angle x$

$\triangle BPC$에서

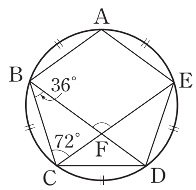
$\angle BCD=\angle x+20^\circ$

따라서 $\triangle QCD$에서

$50^\circ=(\angle x+20^\circ)+\angle x,\ 2\angle x=30^\circ$

$\therefore\ \angle x=15^\circ$

10 오른쪽 그림과 같이 $\overset{\frown}{CD}$의 길이가 원주의 $\frac{1}{5}$이므로



$\angle CBD=180^\circ\times\frac{1}{5}=36^\circ$

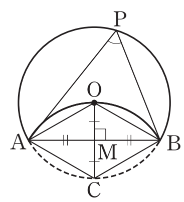
$\overset{\frown}{BAE}$의 길이가 원주의 $\frac{2}{5}$이므로

$\angle BCE=180^\circ\times\frac{2}{5}=72^\circ$

따라서 $\triangle BCF$에서

$\angle BFE=36^\circ+72^\circ=108^\circ$

11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$에 대하여 원의 중심 O와 대칭인 점을 C라 하고, $\overline{OC}$를 그은 후 $\overline{OC}$와 $\overline{AB}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{OC}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{OM}=\overline{CM}$, $\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 □OACB는 마름모이다.



$\therefore\ \overline{OA}=\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{OB}$

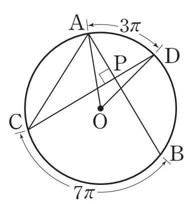
이때 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}$이므로

$\triangle OAC$, $\triangle OCB$는 모두 정삼각형이다.

따라서 $\angle AOB=60^\circ+60^\circ=120^\circ$이므로

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$

12 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 그으면



$\triangle ACP$에서 $\angle APC=90^\circ$이므로

$\angle ACP+\angle CAP=90^\circ$

이때 $\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{BC}=3\pi:7\pi=3:7$이므로

$\angle ACD:\angle BAC=3:7$

$\therefore\ \angle ACD=90^\circ\times\frac{3}{10}=27^\circ$

$\overline{OA}$, $\overline{OD}$를 그으면

$\angle AOD=2\angle ACD=2\times27^\circ=54^\circ$

원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r\times\frac{54}{360}=3\pi$에서 $r=10$

다른 풀이 $\angle APC=90^\circ$이므로 $\angle ACP+\angle CAP=90^\circ$

이때 $\angle ACP$는 $\overset{\frown}{AD}$에 대한 원주각이고, $\angle CAP$는 $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각이므로 길이가 $3\pi+7\pi=10\pi$인 호에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

호의 길이는 그 호에 대한 원주각의 크기에 정비례하므로

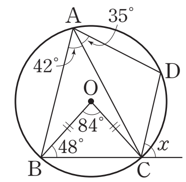
10π : (원 O의 둘레의 길이)$=90^\circ:180^\circ$에서

(원 O의 둘레의 길이)$=20\pi$

따라서 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=20\pi\qquad\therefore\ r=10$

13 오른쪽 그림에서 $\triangle OBC$는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로



$\angle BOC=180^\circ-2\times48^\circ=84^\circ$

$\therefore\ \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\times84^\circ=42^\circ$

따라서 $\angle BAD=42^\circ+35^\circ=77^\circ$이고

□ABCD가 원 O에 내접하므로

$\angle BCD=180^\circ-77^\circ=103^\circ$

$\therefore\ \angle x=180^\circ-\angle BCD$

$=180^\circ-103^\circ=77^\circ$

14 $\triangle DCG$에서

$\angle CDG=180^\circ-(82^\circ+24^\circ)=74^\circ$이므로

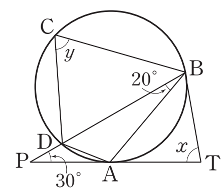
$\angle ADC=180^\circ-74^\circ=106^\circ$

이때 □ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$에서

$\angle ABC=180^\circ-106^\circ=74^\circ$

15 오른쪽 그림과 같이



$\overline{AD}$를 그으면 … (i)

$\angle DAP=\angle DBA=20^\circ$

$\triangle DPA$에서

$\angle BDA=30^\circ+20^\circ=50^\circ$

$\triangle ABD$에서

$\angle DAB=180^\circ-(50^\circ+20^\circ)=110^\circ$

이때 □ABCD는 원에 내접하므로

$\angle y=180^\circ-110^\circ=70^\circ$ … (ii)

$\overline{PT}$, $\overline{BT}$가 원의 접선이므로

$\angle BAT=\angle ABT=\angle BDA=50^\circ$

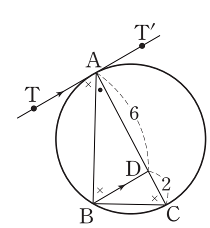
따라서 $\triangle BAT$에서

$\angle x=180^\circ-(50^\circ+50^\circ)=80^\circ$ … (iii)

$\therefore\ \angle x-\angle y=80^\circ-70^\circ=10^\circ$ … (iv)

채점 기준	배점
(i) 보조선 AD 긋기	20 %
(ii) $\angle y$의 크기 구하기	30 %
(iii) $\angle x$의 크기 구하기	30 %
(iv) $\angle x-\angle y$의 값 구하기	20 %

16 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$와 $\triangle ADB$에서



$\overline{BD}\,/\!/\,\overleftrightarrow{TT'}$이므로

$\angle TAB=\angle ABD$ (엇각)

$\overleftrightarrow{TT'}$은 원의 접선이므로

$\angle TAB=\angle BCA$

$\therefore\ \angle ABD=\angle BCA$

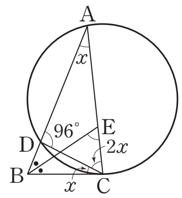
$\angle A$는 공통이므로 $\triangle ABC\backsim\triangle ADB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AD}$이므로

$(6+2):\overline{AB}=\overline{AB}:6$, $\overline{AB}^2=48$

$\therefore\ \overline{AB}=4\sqrt{3}\ (\because\ \overline{AB}>0)$

17 오른쪽 그림에서



$\angle BCD = \angle CAD = \angle x$라 하면

$\overset{\frown}{AD} : \overset{\frown}{CD} = 2 : 1$이므로

$\angle ACD : \angle CAD = 2 : 1$

$\angle ACD : \angle x = 2 : 1$

$\therefore\ \angle ACD = 2\angle x$

$\triangle ADC$에서

$\angle x + 96^\circ + 2\angle x = 180^\circ \qquad \therefore\ \angle x = 28^\circ$

$\therefore\ \angle BCE = \angle BCD + \angle ACD$

$= \angle x + 2\angle x$

$= 3\angle x = 84^\circ$

또 $\triangle BCD$에서

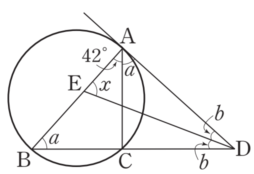
$96^\circ = \angle DBC + 28^\circ \qquad \therefore\ \angle DBC = 68^\circ$

$\therefore\ \angle EBC = \frac{1}{2} \times 68^\circ = 34^\circ$

따라서 $\triangle BCE$에서

$\angle BEC = 180^\circ - (34^\circ + 84^\circ) = 62^\circ$

18 오른쪽 그림과 같이



$\angle CAD = \angle a$,

$\angle ADE = \angle EDB = \angle b$라 하면

$\angle CBA = \angle CAD = \angle a$

$\triangle ABD$에서

$(42^\circ + \angle a) + \angle a + 2\angle b = 180^\circ$

$2(\angle a + \angle b) = 138^\circ \qquad \therefore\ \angle a + \angle b = 69^\circ$

따라서 $\triangle EBD$에서

$\angle x = \angle a + \angle b = 69^\circ$

19 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$이므로 $\overline{PC} = \overline{PD}$

$\overline{PA} = \overline{AB} - \overline{PB} = 2 \times 5 - 8 = 2\,(\text{cm})$

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$이므로

$2 \times 8 = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PC}^2,\ \overline{PC}^2 = 16$

$\therefore\ \overline{PC} = 4\,(\text{cm})\,(\because\ \overline{PC} > 0)$

따라서 $\triangle APC$에서

$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}\,(\text{cm})$

20 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PE}$이므로

$5 \times (5 + \overline{AB}) = 6 \times (6 + 4)$

$25 + 5\overline{AB} = 60 \qquad \therefore\ \overline{AB} = 7$

$\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PE} \cdot \overline{PF}$이므로

$12 \times (12 + \overline{BC}) = 10 \times (10 + 14)$

$144 + 12\overline{BC} = 240 \qquad \therefore\ \overline{BC} = 8$

$\therefore\ \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 7 + 8 = 15$

21 ① $\angle BAC \neq \angle BDC$

따라서 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

② $\angle B + \angle D \neq 180^\circ$

따라서 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

③ $\angle DAB = \angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\angle DAB + \angle BCD \neq 180^\circ$

즉, 마주 보는 두 각의 크기의 합이 180°가 아니므로 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

④ $3 \times 8 = 4 \times 6$이므로 □ABCD는 원에 내접한다.

⑤ $3 \times (3+4) \neq 2 \times (2+6)$이므로 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

따라서 □ABCD가 원에 내접하는 것은 ④이다.

22 $\overline{QA} \cdot \overline{QB} = \overline{QC} \cdot \overline{QD}$이므로

$3 \times 4 = \overline{QC} \times 2 \qquad \therefore\ \overline{QC} = 6$

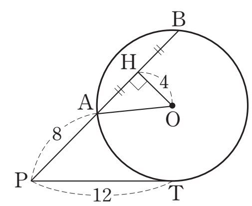
$\overline{PC} = x$라 하면 $\overline{PT}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$이므로

$3^2 = x(x + 6 + 2),\ x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0 \qquad \therefore\ x = 1\,(\because\ x > 0)$

$\therefore\ \overline{PQ} = \overline{PC} + \overline{QC} = 1 + 6 = 7$

23 오른쪽 그림에서



$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$이므로

$12^2 = 8 \times (8 + \overline{AB}),\ 8\overline{AB} = 80$

$\therefore\ \overline{AB} = 10$

$\overline{OH} \perp \overline{AB}$이므로

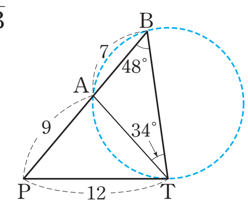
$\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

$\overline{OA}$를 그으면 $\triangle AOH$에서

$\overline{AO} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $\sqrt{41}$이다.

24 $12^2 = 9 \times (9+7)$에서 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$를 만족하므로



$\overline{PT}$는 세 점 A, B, T를 지나는 원의 접선이다.

$\therefore\ \angle ATP = \angle ABT = 48^\circ$

따라서 $\triangle BPT$에서

$\angle APT = 180^\circ - (48^\circ + 34^\circ + 48^\circ)$

$= 50^\circ$

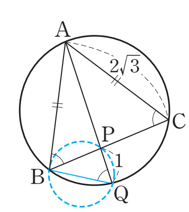
25 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT'}^2$이므로 $\overline{PT} = \overline{PT'} = \sqrt{15}$

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$에서

$(\sqrt{15})^2 = 3 \times (3 + \overline{AB}) \qquad \therefore\ \overline{AB} = 2$

$\therefore\ \overline{AB} + \overline{PT} = 2 + \sqrt{15}$

26 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\sqrt{3}$



$\overline{BQ}$를 그으면 $\angle ACB = \angle AQB$이므로

$\angle ABP = \angle BQP$

즉, $\overline{AB}$는 세 점 B, P, Q를 지나는 원의 접선이다.

따라서 $\overline{AB}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$이므로 $\overline{AP} = x$라 하면

$(2\sqrt{3})^2 = x(x+1),\ x^2 + x - 12 = 0$

$(x+4)(x-3) = 0 \qquad \therefore\ x = 3\,(\because\ x > 0)$

$\therefore\ \overline{AP} = 3$

MEMO